Correction de l'interrogation 01
Logique et raisonnement

1. Compléter le plus précisément possible avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $a \in \mathbb{N}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

1.1 $\boxed{(a \text{ pair }) \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 \text{ pair })}$. En effet, on a déjà vu en classe le sens réciproque $(a^2 \text{ pair }) \Rightarrow (a \text{ pair })$. Montrons donc le sens direct. Supposons a pair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$ et donc $a^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right)$. Posons $k' = 2k^2$, alors $a^2 = 2k'$. Puisque $k' \in \mathbb{Z}$, on en déduit que a^2 est pair.

1.2 $\boxed{\left(u^2 \leqslant v^2\right) \quad \times \quad (u \leqslant v)}$. En effet, prenons $u = 1$ et $v = -2$. On a bien $1^2 = 1 \leqslant 4 = (-2)^2$ et pourtant $u = 1 > -2 = v$. L'implication directe est donc fausse en général. De même dans l'autre sens, prenons $u = -2$ et $v = 1$. Alors, on a bien $u \leqslant v$ et pourtant $u^2 = (-2)^2 = 4 > 1 = v^2$. Donc l'implication réciproque est aussi fausse.

1.3 $\boxed{\left[\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\right) \text{ OU } \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \left(u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\right)}$.

En effet supposons $\left[\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\right) \text{ OU } \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1\right)\right]$ vraie. Premier cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors, on a bien $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Deuxième cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ alors, on a à nouveau $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc dans tous les cas, $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc le sens direct est vrai. Le sens réciproque est faux cependant. En effet, posons par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = 1$ et donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Cependant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et oscille infiniment.

1.4 $\boxed{\dfrac{x+2}{3x+2} = \dfrac{x+2}{x^2+4} \quad \Leftarrow \quad (x = 1 \text{ OU } x = 2)}$. On note que puisque $x \neq -\frac{2}{3}$, on a bien $3x + 2 \neq 0$ et $x^2 + 4 \geqslant 4 > 0$. Donc l'équation est bien définie. De plus, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{3x+2} = \frac{x+2}{x^2+4} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x^2+4\right)(x+2) = (x+2)(3x+2) \qquad \text{car } x^2+4>0 \text{ et } 3x+2\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad x+2 = 0 \text{ OU } x^2+4 = 3x+2\\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ OU } x^2 - 3x + 2 = 0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - 3x + 2$. On a $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc les racines associées sont $\frac{3+1}{2} = 2$ et $\frac{3-1}{2} = 1$. Ainsi,

$$\frac{x+2}{3x+2} = \frac{x+2}{x^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ OU } x = 1 \text{ OU } x = 2.$$

L'équation est donc vraie pour $x = 1$ et $x = 2$ mais elle est aussi vraie pour $x = -2$. Donc $(x = 1 \text{ OU } x = 2)$ est suffisante mais pas nécessaire.

2. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\left[(\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x+T) = f(x)) \text{ ET } \left(\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 0\right)\right] \Rightarrow [\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M].$$

Solution. La réciproque est simplement

$$\boxed{[\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M] \Rightarrow \left[(\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x+T) = f(x)) \text{ ET } \left(\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 0\right)\right].}$$

La contraposée est donnée par

$$\boxed{[\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M] \Rightarrow \left[(\forall T \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}_+,\ f(x+T) \neq f(x)) \text{ OU } \left(\exists x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) \neq 0\right)\right].}$$

Enfin, la négation est

$$\boxed{\left[(\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x+T) = f(x)) \text{ ET } \left(\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 0\right)\right] \text{ ET } [\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M].}$$

NB : Cette implication est tirée d'une implication plus simple qui dit qu'une fonction continue et périodique est nécessairement bornée.

3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire en une assertion mathématique le fait que pour tout réel, pour que ce réel ait une image par f égale à son image par g, il est nécessaire que ce réel soit un multiple entier de 2π, puis nier cette assertion.
Solution. L'assertion cherchée est
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ [(f(x) = g(x)) \qquad \Rightarrow \qquad (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi)]\,.}$$
La négation est donc
$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ [(f(x) = g(x)) \ \text{ ET } \ (\forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq 2k\pi)]\,.}$$

4. On fixe $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
Solution. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } u_n = 3^n - 2^n \text{ ».}$$
Procédons par récurrence une récurrence double.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 0$ et $3^n - 2^n = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$. Donc $u_0 = 3^0 - 2^0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, alors $u_1 = 1$ et $3^n - 2^n = 3 - 2 = 1$ donc $u_1 = 3^1 - 2^1$ et $\mathscr{P}(1)$ est aussi vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \ \text{ ET } \ \mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies donc on a $u_n = 3^n - 2^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Montrons $\mathscr{P}(n+2)$. Par construction puis les hypothèses de récurrence,
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) - 6\left(3^n - 2^n\right) = 3^n(15-6) + (-10+6)2^n = 9\times 3^n - 4\times 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}.$$
Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est bien vérifiée.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on a bien
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 2^n.}$$

5. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{5x - 4}$.
Solution. **Méthode 1 : par équivalents.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'une part $5x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{4}{5}$. D'autre part, soit Δ le discriminant de $x^2 - 3x - 4$. On a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines sont $\frac{3-5}{2} = -1$ et $\frac{3+5}{2} = 4$. Dès lors,
$$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant -1 \ \text{ OU } \ x \geqslant 4.$$
Ainsi, l'équation est bien définie si et seulement si,
$$\begin{cases} 5x - 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \geqslant \frac{4}{5} \\ x \leqslant -1 \ \text{ OU } \ x \geqslant 4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant 4.$$
Fixons désormais $x \geqslant 4$. Alors, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{5x - 4} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 5x - 4 \quad \text{car pour } x \geqslant 4,\ x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \text{ et } 5x - 4 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-8) = 0 \qquad \textit{pas de discriminant ici !!)} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = 8. \end{aligned}$$
Or $x \geqslant 4$. Conclusion, l'équation admet une unique solution :
$$\boxed{\mathscr{S} = \{8\}\,.}$$
Méthode 2 : par analyse/synthèse. *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{5x - 4} \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 5x - 4 \\ &\Rightarrow \quad x^2 - 8x = 0 \\ &\Rightarrow \quad x(x-8) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = 8. \end{aligned}$$
Donc si x est une solution, alors $x = 0$ ou $x = 8$.
Synthèse. Vérifions si les candidats précédents sont réellement solutions ou non. Si $x = 0$, alors $x^2 - 3x - 4 = -4 < 0$ et donc l'équation n'existe pas. Si $x = 8$, on a $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{64 - 24 - 4} = \sqrt{36} = 6$. D'autre part, $\sqrt{5x - 4} = \sqrt{40 - 4} = \sqrt{36} = 6$. Donc $x = 8$ est une solution.
Conclusion, l'équation admet une unique solution :
$$\boxed{\mathscr{S} = \{8\}\,.}$$