Correction de l'interrogation 3
Trigonométrie

1. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Développer $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$
$$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).}$$

(b) Enoncer les formules de l'angle moitié.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
4\cos^3(x) - 3\cos(x) &= \cos(x)\left(4\cos^2(x) - 3\right) \\
&= \cos(x)\left(4 \times \frac{1+\cos(2x)}{2} - 3\right) \\
&= \cos(x)\left(2\cos(2x) - 1\right) \\
&= 2\cos(2x)\cos(x) - \cos(x) \\
&= 2\frac{\cos(2x+x) + \cos(2x-x)}{2} - \cos(x) \\
&= \cos(3x) + \cos(x) - \cos(x) \\
&= \cos(3x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{4\cos^3(x) - 3\cos(x) = \cos(3x).}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos(3\theta) + \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.
Solution. **Méthode 1.** On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= 2\cos\left(\frac{3\theta + 3\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta - 3\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(3\theta) + \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right).}$$

Méthode 2. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(3\theta) - \sin(3\theta) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3\theta) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3\theta)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(3\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(3\theta)\right) \\
&= \sqrt{2}\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(3\theta) + \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right).}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos(2x)+2=5\sin(x)$.
Solution. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\cos(2x)+2=5\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad 1-2\sin^2(x)+2=5\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2(x)+5\sin(x)-3=0.$$

Posons $X=\sin(x)$. On a

$$\cos(2x)+2=5\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad 2X^2+5X-3=0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta=25+24=1$. Donc les racines associées sont $\frac{-5-7}{4}=-3$ et $\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$. Dès lors,

$$\cos(2x)+2=5\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad X=-3 \text{ OU } X=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x)=-3 \text{ OU } \sin(x)=\frac{1}{2}.$$

Or $\sin(x)\geqslant -1>-3$. Donc

$$\cos(2x)+2=5\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x)=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ OU } x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi.$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)+\sin(3x)<2\sin(2x)$ et représenter les solutions sur le cercle unité.
Solution. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(x)+\sin(3x)<2\sin(2x) &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)<2\sin(2x)\\ &\Leftrightarrow 2\sin(2x)\cos(-x)<2\sin(2x)\\ &\Leftrightarrow 2\sin(2x)(1-\cos(x))>0.\end{aligned}$$

Si $x\equiv 0\ [2\pi]$, alors $\cos(x)=1$ et $1-\cos(x)=0$, dans ce cas l'inéquation stricte n'est pas vérifiée. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}=\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Alors, $1-\cos(x)>0$. Donc

$$\begin{aligned}\sin(x)+\sin(3x)<2\sin(2x) &\Leftrightarrow \sin(2x)>0\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi.\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi;0+2k\pi\right[\cup\left]0+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right[\right).$$