Correction de l'interrogation 04
Nombres complexes

1. (a) Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
Solution. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$
(b) Enoncer la formule de Moivre.
Solution. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. Déterminer la forme algébrique de $z = \frac{(3+2i)^2(1+i)}{1-i}$.
Solution. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$z = \frac{(3+2i)^2(1+i)}{1-i} = \frac{(9+12i-4)(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(5+12i)(1+2i-1)}{1+1} = \frac{(5+12i)\,2i}{2} = -12+5i.$$
Conclusion,
$$\boxed{z = -12+5i.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les complexes, développer $\sin(5x)$.
On donnera le résultat uniquement en fonction de $\sin(x)$ *et de ses puissances.*
Solution. Par la formule de Moivre, on a les égalités entre complexes suivantes :
$$\sin(5x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{5ix}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^5\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^5\right).$$
Donc par la formule du binôme de Newton,
$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \mathrm{Im}\left(\cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x)\right)\\ &= 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)\\ &= 5\left(1-\sin^2(x)\right)^2\sin(x) - 10\left(1-\sin^2(x)\right)\sin^3(x) + \sin^5(x)\\ &= 5\sin(x) - 10\sin^3(x) + 5\sin^5(x) - 10\sin^3(x) + 10\sin^5(x) + \sin^5(x)\\ &= 5\sin(x) - 20\sin^3(x) + 16\sin^5(x).\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\sin(5x) = 5\sin(x) - 20\sin^3(x) + 16\sin^5(x).}$$
On vérifie son résultat avec $x = \frac{\pi}{2}$ *par exemple,*
$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 = 5 - 20 + 16 \ \ \textit{OK !}$$

4. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-2i}{z+2i} \in \mathbb{R}$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}\frac{z-2i}{z+2i} \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-2i}{z+2i} = \overline{\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z-2i}{z+2i} = \frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}-2i}\\ &\Leftrightarrow \quad (z-2i)(\overline{z}-2i) = (\overline{z}+2i)(z+2i) \qquad \text{car } z \neq -2i \text{ et donc } \overline{z} \neq 2i\\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2 - 2iz - 2i\overline{z} - 4 = |z|^2 + 2i\overline{z} + 2iz - 4\\ &\Leftrightarrow \quad 0 = 4iz + 4i\overline{z}\\ &\Leftrightarrow \quad z + \overline{z} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad z = -\overline{z}\\ &\Leftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

On n'oublie pas d'enlever $-2i$! ! On obtient alors l'ensemble solution suivant :

$$\boxed{\mathscr{S} = i\mathbb{R} \setminus \{-2i\}\,.}$$

5. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de linéarisation, on a

$$\begin{aligned}
\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{6} + x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6} - x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} < \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x) + \frac{1}{2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x) < \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\,.}$$