Correction de l'interrogation 05

1. (a) Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(b) Enoncer la formule du binôme de Newton.
Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $S_n = \sum_{k=3}^{n+1} 2^k 3^{n-k}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k 3^n \\ &= 3^n \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-3+1}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 3^{n-3} \times 8 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{\frac{1}{3}} \\ &= 3^{n-2} \times 8 \times \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^{n-1}} \\ &= \frac{8}{3}\left(3^{n-1}-2^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{8}{3}\left(3^{n-1}-2^{n-1}\right).}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une inversion d'indice, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$.

Solution. Posons $\tilde{k} = n-k$ i.e. $k = n - \tilde{k}$. Quand $k=0$, $\tilde{k} = n$ et quand $k=n$, $\tilde{k}=0$. Alors,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \binom{n}{n-\tilde{k}} (n-\tilde{k}) & \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} (n-k) & \text{car l'indice de sommation est muet} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k) & \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\ &= n\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k & \\ &= n(1+1)^n - S_n & \text{car on reconnaît un binôme de Newton} \\ &= n2^n - S_n. & \end{aligned}$$

Dès lors, on obtient que $2S_n = n2^n$. Conclusion,

$$\boxed{S_n = n2^{n-1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{j} i^2 2^j$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^2 2^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2 (1+2)^n && \text{car on reconnaît une somme binomiale} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2 \times 3^n \\ &= 3^n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{3^n n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} 2^i$.

Solution. On va sommer sur i en interne :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} 2^i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 2^i - 1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left((2+1)^j - 1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} 3^j - \sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= 3 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \\ &= \frac{3}{2} (3^n - 1) - n. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{3}{2} (3^n - 1) - n.}$$