Correction de l'interrogation 07
Equations complexes

1. (a) Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
   Solution. Soient $(s, p) \in \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $z^2 - sz + p$. Alors,
   $$z_1 + z_2 = s \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = p.$$
   (b) Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.
   Solution. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a
   $$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$
   (c) Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
   Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $J = f(I)$. On suppose que f strictement monotone et dérivable sur I. Si de plus pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} existe, est dérivable sur J et
   $$\forall x \in J, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\omega^2 = 15 - 8i$.
   Solution. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = x + iy$. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned}
   \omega^2 = 15 - 8i \qquad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 15 - 8i \\ x^2 + y^2 = |\omega|^2 = |15 - 8i| = \sqrt{15^2 + 8^2} \end{cases} \\
   & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = -4 \\ x^2 + y^2 = |225 + 64| = |289| = 17 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique} \\
   & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x^2 + y^2 = 17 \\ xy = -4 \end{cases} \\
   & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 1 \\ xy = -4 \end{cases} \\
   & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}.
   \end{aligned}$$
   Conclusion, l'ensemble des solutions de $\omega^2 = 15 - 8i$ est
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{4 - i; -4 + i\}.}$$
   On vérifie son résultat : $(4 - i)^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i$ *OK !*

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z + 1)^5 = (z - i)^5$.
   Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
   $$(z+1)^5 = (z-i)^5 \;\Leftrightarrow\; \exists k \in [\![0; 4]\!],\; z + 1 = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}(z - i) \;\Leftrightarrow\; \exists k \in [\![0; 4]\!],\; 1 + i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} = z\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1\right).$$
   On note que $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 0$. De plus si $k = 0$, alors $1 + i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} = 1 + i \neq 0 = z\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1\right)$. Donc $k = 0$

n'est pas possible dans notre équation. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(z+1)^5=(z-i)^5 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}-1\right)=1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}=1+\mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\frac{1+\mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}-1}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\frac{\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{5}}}\frac{\mathrm{e}^{-i\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{5}}-\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{5}}}\\
&\qquad\qquad \text{par factorisation par l'angle moitié}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}
\end{aligned}$$

Conclusion, les solutions sont

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\;\middle|\; k\in[\![1;4]\!]\right\}.}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)z-1=0$.
Solution. Soit Δ le discriminant associé à l'équation. On a

$$\Delta=\left(1-i\sqrt{3}\right)^2+4=1-2i\sqrt{3}-3+4=2-2i\sqrt{3}=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Donc les racines de Δ sont $2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$. Posons $\delta=\sqrt{3}-i$. Dès lors les solutions de l'équation sont

$$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i) \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{1-i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i).$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)\,;\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)\right\}.}$$

5. Soit $f:z\mapsto(1-i)z+2i-1$. A quelle transformation du plan correspond f ?
Solution. Cherchons les points fixes de f. Soit $\omega\in\mathbb{C}$. On a

$$f(\omega)=\omega \quad\Leftrightarrow\quad \omega=(1-i)\,\omega+2i-1 \quad\Leftrightarrow\quad i\,\omega=2i-1 \quad\Leftrightarrow\quad \omega=2+i.$$

Posons $\omega=2+i$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a

$$f(z)-\omega=f(z)-f(\omega)=(1-i)\,z+2i-1-[(1-i)\,z+2i-1]=(1-i)(z-\omega).$$

Donc pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-\omega)+\omega=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}(z-\omega)+\omega.$$

Conclusion,

> L'application f est une similitude de coefficient homothétique $k=\sqrt{2}$, d'angle de rotation $\theta=-\frac{\pi}{4}$ et de centre $\omega=2+i$.