Correction de l'interrogation 8
Calcul d'intégrales

1. (a) Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(b) Enoncer le théorème d'intégration par parties.
Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Dresser les variations de sinus, cosinus et tangente sur $[0; 2\pi]$.
Solution. Pour le cosinus, on a

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Pour le sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Pour la tangente :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

2. (a) Sans justification, ni d'étude de domaine de définition, donner l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}}$.
Solution. L'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{2}\arcsin\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Ou encore,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}\arccos\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Pour les amoureux de la rigueur : soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de la fonction $F : x \mapsto \frac{x}{e^{x^2}\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x^2}\sqrt{1-e^{-2x^2}} \neq 0 \\ 1-e^{-2x^2} \geqslant 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad 1-e^{-2x^2} > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 1 > e^{-2x^2} \\
& \Leftrightarrow \quad 1 < e^{2x^2} \qquad \textit{car } e^{2x^2} > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2x^2 > 0 \qquad \textit{par la stricte croissance de la fonction exponentielle} \\
& \Leftrightarrow \quad x \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc la fonction F est définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus, la fonction F est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions qui le sont sur le leur et donc F est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$ et sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ ($\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !). Donc F admet d'une part des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ et d'autre part des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Sans justification, ni d'étude de domaine de dérivabilité, calculer la dérivée de $f : x \mapsto \ln\left(\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)\right)$.

Solution. Soit $\mathcal{D}'$ le domaine de dérivabilité de f. Pour tout $x \in \mathcal{D}'$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)\right)'}{\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)'}{1+\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)^2}\frac{1}{\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{ch}(x)x-\operatorname{sh}(x)}{x^2}\frac{1}{1+\frac{\operatorname{sh}^2(x)}{x^2}}\frac{1}{\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)} \\
&= \frac{x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}{x^2+\operatorname{sh}^2(x)}\frac{1}{\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}', \qquad f'(x) = \frac{x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}{x^2+\operatorname{sh}^2(x)}\frac{1}{\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)}.}$$

Aaaaah je vous sens dévorés de curiosité pour le domaine de dérivabilité. Allez c'est parti. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}' \quad & \Leftarrow \quad \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \textit{car } \arctan(x) > 0 \textit{ sur } \mathbb{R}_+^* \textit{ et } \arctan(x) \leqslant 0 \textit{ sur } \mathbb{R}_- \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{sh}(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \textit{OU} \quad \begin{cases} \operatorname{sh}(x) < 0 \\ x < 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x > 0 \ \ \textit{OU} \ \ x < 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}^*.$$

3. Justifier que $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} \, dx$ existe et la calculer par une intégration par parties.

Solution. La fonction $x \mapsto x^3 e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$. Donc I existe. De plus, posons,

$$\forall x \in [0;1], \qquad \begin{cases} u(x) = e^{x^2} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\forall x \in [0;1], \qquad \begin{cases} u'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \\ v'(x) = x \end{cases}.$$

Alors, par intégration par parties, on obtient,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2} - 0 - \left[\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{I \text{ existe}}$ et

$$\boxed{I = \frac{1}{2}.}$$

4. Justifier que $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t+1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les calculer à l'aide d'un changement de variable.
Solution. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t+1 > 1 > 0$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Donc comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle) donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, F est une primitive de f. Pour tout $t \in [0;x]$ (ou $[x;0]$) posons $u = \varphi(t) = \mathrm{e}^t$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;x]$ (ou $[x;0]$) et $\forall t \in [0;x]$, $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Par suite,

$$F(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u.$$

Autre rédaction : pour tout $t \in [0;x]$ (ou $[x;0]$) posons $u = \mathrm{e}^t$ ou encore, pour tout $u \in [1;\mathrm{e}^x]$ (ou $[\mathrm{e}^x;1]$) posons $t = \varphi(u) = ln(u)$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1;\mathrm{e}^x]$ et pour tout $u \in [1;\mathrm{e}^x]$, $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Ainsi,

$$F(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{u}{u^2+u+1}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_{u=1}^{u=\mathrm{e}^x} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{u=1}^{u=\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{3}}\right) - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}_{=\text{constante}}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{array}\;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Vérification : Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\left(\frac{2\,\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2\,\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{3}}}{1+\frac{4\,\mathrm{e}^{2x}+4\,\mathrm{e}^x+1}{3}}\\&=\frac{4}{3}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\frac{4\,\mathrm{e}^{2x}+4\,\mathrm{e}^x+1}{3}}\\&=\frac{4\,\mathrm{e}^x}{3+4\,\mathrm{e}^{2x}+4\,\mathrm{e}^x+1}\\&=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}.\end{aligned}$$

Nous sommes tellement doués !

5. Soit $A(x)\underset{x\to0}{=}o\left(\sin\left(x^4\right)-5x^2\right)+o\left(x^3\,\mathrm{e}^x\right)$. Simplifier $A(x)$.

Solution. On a

$$\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\sin\left(x^4\right)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\sin\left(x^4\right)}{x^4}\times x^2.$$

Or $\lim_{\substack{u\to0\\u\neq0}}\frac{\sin(u)}{u}=1$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\sin\left(x^4\right)}{x^2}=1\times0=0.$$

Autrement dit, $\sin\left(x^4\right)\underset{x\to0}{\ll}x^2$. D'autre part,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{x^3\,\mathrm{e}^x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}x\,\mathrm{e}^x=0\times1=0.$$

Par de croissance comparée ni de forme indéterminée !

Autrement dit $x^3\,\mathrm{e}^x\underset{x\to0}{\ll}x^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}A(x)&\underset{x\to0}{=}o\left(\sin\left(x^4\right)-5x^2\right)+o\left(x^3\,\mathrm{e}^x\right)\\&\underset{x\to0}{=}o\left(-5x^2\right)+o\left(x^3\,\mathrm{e}^x\right)\\&\underset{x\to0}{=}o\left(-5x^2\right)\\&\underset{x\to0}{=}o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A(x)\underset{x\to0}{=}o\left(x^2\right).}$$