Solutions de l'interrogation 9
Equations différentielles d'ordre 1

1. (a) Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation.
Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I, y_p une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$
Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) est donné par
$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{\, y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \,\}.$$
(b) Définir un problème de Cauchy.
Solution. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy
$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
(c) Enoncer les inégalités triangulaires.
Solution. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
2. Déterminer les intervalles de résolution puis $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction dérivable.
$$(E) \qquad y'(t) = t\cos(t)y(t) + t\sin(t).$$
On donnera $\mathscr{S}_0$ sous forme ensemble et sous forme de Vect.
Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est
$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x\sin(x)+\cos(x)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{x\sin(x)+\cos(x)} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$
3. Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{\arctan^2(x)}{2} + C\right)(1 + x^2) \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$
4. Justifier que $f : x \mapsto \frac{x^3+x}{x^2+x+1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
Solution. Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$
5. Soit $I = \displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$. Justifier que I existe et la calculer à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.
Solution. Conclusion,
$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln(3).}$$