Correction de l'interrogation d'entraînement 0 Révisions de calculs

1. Simplifier $A = \frac{\frac{27}{5}+\frac{21}{4}}{1-\frac{7}{6}+\frac{5}{3}}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$A = \frac{\frac{108+105}{20}}{\frac{6-7+10}{6}} = \frac{213}{20}\frac{6}{9} = \frac{213}{10}\frac{1}{3} = \frac{71}{10}.$$
Conclusion,
$$\boxed{A = \frac{71}{10}.}$$

2. Simplifier $B = \frac{25\times 12^2\times 10^3}{24\times 8^2\times 12^3}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$B = \frac{5^2\times 5^3\times 2^3}{12\times 2\times (2^3)^2\times 12} = \frac{5^5\times 2^3}{12^2\times 2^7} = \frac{5^5}{3^2\times 2^4\times 2^4} = \frac{5^5}{2^8\times 3^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{B = \frac{5^5}{2^8\times 3^2}.}$$

3. Simplifier $C = 4\sqrt{63}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{7}}-8\sqrt{7}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$C = 4\sqrt{9}\sqrt{7}-\sqrt{4}\sqrt{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}-8\sqrt{7} = 12\sqrt{7}-2\sqrt{7}+\frac{\sqrt{7}}{7}-8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}+\frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{15}{7}\sqrt{7}.$$
Conclusion,
$$\boxed{C = \frac{15}{7}\sqrt{7}.}$$

4. Simplifier $D = \sqrt{\sqrt{35\times 56\times 49\times 50}}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\sqrt{7\times 5\times 7\times 8\times 7^2\times 5\times 10}} \\ &= \sqrt{\sqrt{7^4\times 5^3\times 2^4}} \\ &= 7\times 2\times\sqrt{\sqrt{5^3}} \\ &= \sqrt{2^2\times 5\times 7^2} \\ &= 14\sqrt[4]{5^3}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{D = 14\sqrt[4]{5^3}.}$$

5. Simplifier $E = \ln\left(72^3\right)-\ln\left(36^2\right)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$E = 3\ln(72)-2\ln(36) = 3\ln(9)+3\ln(8)-4\ln(6) = 6\ln(3)+9\ln(2)-4\ln(2)-4\ln(3) = 2\ln(3)+5\ln(2).$$
Conclusion,
$$\boxed{E = 2\ln(3)+5\ln(2).}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $F = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x-1}}}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$F = \sqrt{\mathrm{e}^{x^2-2x+1}} = \sqrt{\mathrm{e}^{(x-1)^2}} = \mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{F = \mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}}.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $G = (3x+2)^4$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$G = \left(9x^2+12x+4\right)^2 = 81x^4+144x^2+16+2\times 108x^3+2\times 36x^2+2\times 48x = 81x^4+144x^2+16+216x^3+72x^2+96x.$$

Conclusion,

$$\boxed{G = 81x^4+216x^3+216x^2+96x+16.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $H = 9x^8 - 4x^2 + 3x^4 + 2x$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$H = \left(3x^4\right)^2 - (2x)^2 + 3x^4 + 2x = \left(3x^4-2x\right)\left(3x^4+2x\right) + 3x^4 + 2x = \left(3x^4+2x\right)\left(3x^4-2x+1\right)$$

Conclusion,

$$\boxed{H = \left(3x^4+2x\right)\left(3x^4-2x+1\right).}$$

9. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $f : x \mapsto \frac{x^3-2x+1}{x^2+x+1}$.
Solution. Soit Δ le discriminant associé à x^2+x+1. On a $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ donc $x \mapsto x^2+x+1$ est de signe constant et en particulier strictement positive. Donc f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= \frac{\left(3x^2-2\right)\left(x^2+x+1\right) - \left(x^3-2x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} \\ &= \frac{3x^4+3x^3+3x^2-2x^2-2x-2-\left(2x^4+x^3-4x^2-2x+2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} \\ &= \frac{x^4+2x^3+5x^2-2x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{x^4+2x^3+5x^2-2x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}.}$$

10. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $g : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{(3x^2+1)^7}\right)$.
Solution. La fonction cosinus est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+1 > 0$. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = -\frac{7\,(6x)}{\left(3x^2+1\right)^8}\left(-\sin\left(\frac{1}{\left(3x^2+1\right)^7}\right)\right) = \frac{42x}{\left(3x^2+1\right)^8}\sin\left(\frac{1}{\left(3x^2+1\right)^7}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{42x}{\left(3x^2+1\right)^8}\sin\left(\frac{1}{\left(3x^2+1\right)^7}\right).}$$

11. *BONUS : à ne faire qu'en dernier.*
Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $h : x \mapsto \sqrt{2\ln^2(x) + \ln\left(x^2\right) - 3\ln(x)}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
h \text{ dérivable en } x \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln^2(x),\ \ln\left(x^2\right),\ \ln\left(x^2\right) \text{ existent} \\ 2\ln^2(x) + \ln\left(x^2\right) - 3\ln(x) > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 2\ln^2(x) + 2\ln(x) - 3\ln(x) > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 2\ln^2(x) - \ln(x) > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ (2\ln(x) - 1)\ln(x) > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit $x > 0$. Posons $X = \ln(x)$. On a $(2X-1)X > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty;0[\cup]1/2;+\infty[$. Par conséquent, pour $x > 0$,

$$h \text{ dérivable en } x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) < 0 \ \text{ OU } \ \ln(x) > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \ \text{ OU } \ x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}},$$

par la stricte croissance de la fonction exponentielle. Ainsi le domaine de dérivabilité de h est $\mathscr{D} =]0;1[\cup \left]\mathrm{e}^{1/2};+\infty\right[$. De plus, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$h'(x) = \left(\sqrt{2\ln^2(x) + \ln(x)}\right)' = \frac{\left(2\ln^2(x) + \ln(x)\right)'}{2\sqrt{2\ln^2(x) + \ln(x)}} = \frac{4\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{(2\ln(x)+1)\ln(x)}} = \frac{4\ln(x)+1}{x\sqrt{(2\ln(x)+1)\ln(x)}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{h \text{ est dérivable sur } \mathscr{D} =]0;1[\cup \left]\mathrm{e}^{1/2};+\infty\right[\text{ et } \forall x \in \mathscr{D}, \quad h'(x) = \frac{4\ln(x)+1}{x\sqrt{(2\ln(x)+1)\ln(x)}}.}$$