Interrogation 1 d'entrainement
Logique et raisonnement

1. **Manipuler les implications et équivalences.** Compléter avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(x,a) \in \mathbb{R}^2$, $(y,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle)

1.1	$\cos(x) = 0$	....	$\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$
1.2	$e^x \geqslant 1$	....	$x \geqslant 0.$
1.3	$z \in \mathbb{R}$	....	$\mathrm{Re}(z) = z.$
1.4	$x = y$	....	$\cos(x) = \cos(y).$
1.5	$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$	....	$\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}.$
1.6	$\ln(x) \geqslant 0$	....	$x > 1.$
1.7	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante	....	$u_{25} > u_{20}.$
1.8	$x \geqslant \frac{\pi}{2}$	....	$\cos(x) \leqslant 0.$
1.9	$x^2 \geqslant 25$	....	$x \geqslant 5.$
1.10	$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A$	....	$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ f(x) > B.$

2. **Réciproque/contraposée/négation.**

2.1 Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = \cos(y).$$

2.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

2.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M.$$

2.4 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \geqslant a.$$

2.5 Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y)\right].$$

3. **Quantificateurs.**
   3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone puis sa négation.
   3.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis sa négation.
   3.3 Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que π soit irrationnel puis sa négation.
   3.4 Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que toutes les fonctions de $\mathscr{E}$ sont positives sur $\mathbb{R}$ puis sa négation.
   3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f ne prenne que des valeurs entières puis sa négation.
4. **Récurrence.**
   4.1 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   4.2 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   4.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
   4.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^n-1}{2}$.
   4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - (-2)^n$.
   4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturer une expression simple de u_n puis le démontrer rigoureusement.
5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.**
   5.1 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2-1} = x + 2$.
   5.2 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1}$.
   5.3 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2}$.
   5.4 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2x^2-x-3} = x + 1$.
   5.5 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = -1 + \sqrt{x^2-2}$.