Correction de l'interrogation 1 d'entrainement
Logique et raisonnement

1. **Manipuler les implications et équivalences.**
   1.1 $\Leftarrow$
   1.2 $\Leftrightarrow$
   1.3 $\Leftrightarrow$
   1.4 $\Rightarrow$
   1.5 $\Leftarrow$
   1.6 $\Leftarrow$
   1.7 $\times$
   1.8 $\times$
   1.9 $\Leftarrow$
   1.10 $\Rightarrow$
2. **Réciproque/contraposée/négation.**
   2.1 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La réciproque est

$$\cos(x) = \cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

La contraposée est

$$\cos(x) \neq \cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2\pi} \notin \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \ \text{ ET } \ \cos(x) \neq \cos(y).$$

   2.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La réciproque est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}).$$

La contraposée est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (f \text{ n'est pas croissante sur } \mathbb{R}) \text{ OU } (f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}).$$

La négation est

$$(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}) \text{ ET } \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R}\right).$$

   2.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La réciproque est

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M \quad \Rightarrow \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

La contraposée est

$$\big(\forall (m, M) \in \mathbb{R}^2, \ \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n < m \ \text{ OU } \ u_n > M\big) \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ diverge.}$$

La négation est

$$(u_n) \ \text{ converge } \ \text{ET} \ \big(\forall (m, M) \in \mathbb{R}^2, \ \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n < m \ \text{ OU } \ u_n > M\big)$$

2.4 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La réciproque est

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \geqslant a \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > a.$$

La contraposée est

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < a \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant a.$$

La négation est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > a \ \text{ ET } \lim_{x\to+\infty} f(x) < a.$$

2.5 Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La réciproque est

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y)\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))\right].$$

La contraposée est

$$\left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ \text{tel que } f(x) = f(y)\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \text{ tel que } f(x) \geqslant f(y)\right].$$

La négation est

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))\right] \text{ ET } \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ \text{tel que } f(x) = f(y)\right].$$

3. **Quantificateurs.**

3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'assertion est

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n) \ \text{ OU } \ (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n).$$

La négation est

$$(\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n) \ \text{ ET } \ (\exists m \in \mathbb{N},\ u_{m+1} > u_m).$$

3.2 L'assertion est

$$\Big(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)\Big) \ \text{ ET } \ \Big(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)\Big).$$

La négation est donc,

$$\Big(\exists (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x \leqslant y,\ f(x) > f(y)\Big) \ \text{ OU } \ \Big(\exists (x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2,\ x < y,\ f(x) \leqslant f(y)\Big).$$

3.3 L'assertion est

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \pi \neq \frac{p}{q}.$$

La négation est

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \pi = \frac{p}{q}.$$

3.4 Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'assertion est

$$\forall f \in \mathscr{E},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$$

La négation est

$$\exists f \in \mathscr{E},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0.$$

3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \notin \mathbb{Z}.$$

4. **Récurrence.**

4.1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Si $n=1$, alors $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$1+2+3+\cdots+n+n+1 = \frac{n\,(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n\,(n+1)+2\,(n+1)}{2} = \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}.}$$

4.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Si $n=1$, alors $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)+6\,(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{\left(2n^2+n+6n+6\right)(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.}$$

4.3 Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Initialisation. Si $n=0$, alors $\frac{1-x}{1-x} = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$. Puisque $P(n)$ est vraie, on a $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$$

4.4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = \frac{5^n-1}{2}$.

Initialisation. Si $n=0$, alors $\frac{5^n-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $u_n = \frac{5^n-1}{2}$. Montrons $P(n+1)$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = 5u_n + 2 &= 5\frac{5^n-1}{2} + 2 \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{5^{n+1}-5+4}{4} \\
&= \frac{5^{n+1}-1}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5^n - 1}{2}.}$$

4.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = 4^n - (-2)^n$. Procédons à une récurrence double.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $4^n - (-2)^n = 1 - 1 = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, alors $4^n - (-2)^n = 4 - (-2) = 6 = u_1$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(P(n) \text{ ET } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors $u_n = 4^n - (-2)^n$ et $u_{n+1} = 4^{n+1} - (-2)^{n+1}$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n &= 2\left(4^{n+1} - (-2)^{n+1}\right) + 8\left(4^n - (-2)^n\right) \qquad \text{par les hypothèses de récurrence} \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4 \times 4^n - (-4)(-2)(-2)^n \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4^{n+1} - (-4)(-2)^{n+1} \\ &= 4^{n+1}(2+2) - (-2)^{n+1}(2-4) \\ &= 4^{n+2} - (-2)^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est aussi vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n - (-2)^n.}$$

4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2}{n+1}$. On commence par calculer les premiers termes. On a

$$u_1 = \frac{u_0^2}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Puis,

$$u_2 = \frac{u_0^2 + u_1^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Et encore,

$$u_3 = \frac{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2}{3} = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

On conjecture alors le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1.$$

Procédons à une récurrence forte. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = 1$.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 1$ par hypothèse. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\forall k \leqslant n,\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $P(k)$ est vraie. Alors pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $u_k = 1$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de la suite, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2}{n+1} = \frac{1+1+\cdots+1}{n+1} \qquad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Donc $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ et $P(n+1)$ est aussi vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.}$$

5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.** Je vous présente pour chaque question deux méthodes de résolution. Par analyse-synthèse ou directement par équivalences. N'hésitez pas à vous entrainer sur les deux.

5.1 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} = x + 2 &\Rightarrow x^2 - 1 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \\ &\Rightarrow 4x = -5 \\ &\Rightarrow x = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x=-\frac{5}{4}$, on a $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$ et $x+2=-\frac{5}{4}+2=\frac{3}{4}$ donc $-\frac{5}{4}$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1}=x+2 \iff x=-\frac{5}{4}}.$$

Par équivalences : soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-1}=x+2 \quad &\iff \quad x^2-1=(x+2)^2=x^2+4x+4 \ \text{ ET } \ x^2-1\geqslant 0 \ \text{ ET } \ x+2\geqslant 0\\
&\iff \quad 4x=-5 \ \text{ ET } \ x^2\geqslant 1 \ \text{ ET } \ x\geqslant -2\\
&\iff \quad x=-\frac{5}{4} \ \text{ ET } x^2\geqslant 1 \ \text{ ET } \ x\geqslant -2\\
&\iff \quad x=-\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1}=x+2 \iff x=-\frac{5}{4}}.$$

5.2 **Par analyse-synthèse :** soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1} \ &\Rightarrow \ x-1=2x+1\\
&\Rightarrow \ x=-2.
\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x=-2$, on a $\sqrt{x-1}=\sqrt{-3}$ n'existe pas !
Conclusion, $\boxed{\text{cette équation n'admet aucune solution}}$.
Par équivalences : soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1} \quad &\iff \quad x-1=2x+1 \ \text{ ET } \ x-1\geqslant 0 \ \text{ ET } \ 2x+1\geqslant 0\\
&\iff \quad x=-2 \ \text{ ET } \ x\geqslant 1 \ \text{ ET } \ x\geqslant -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion, $\boxed{\text{cette équation n'admet aucune solution}}$.

5.3 **Par analyse-synthèse :** soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \ &\Rightarrow \ x+5=2x+2\\
&\Rightarrow \ x=3.
\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x=3$, on a $\sqrt{x+5}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2x+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Donc $x=3$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \qquad \iff \qquad x=3.}$$

Par équivalences : soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \quad &\iff \quad x+5=2x+2 \ \text{ ET } \ x+5\geqslant 0 \ \text{ ET } \ 2x+2\geqslant 0\\
&\iff \quad x=3 \ \text{ ET } \ x\geqslant -5 \ \text{ ET } \ x\geqslant -1\\
&\iff \quad x=3.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+2} \qquad \iff \qquad x=3.}$$

5.4 **Par analyse-synthèse :** soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \ &\Rightarrow \ 2x^2-x-3=x^2+2x+1\\
&\Rightarrow \ x^2-3x-4=0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta=9+16=25$. Donc $x=\frac{3+5}{2}=4$ ou $x=\frac{3-5}{2}=-1$. Synthèse : si $x=4$, on a $\sqrt{2x^2-x-3}=\sqrt{32-4-3}=5=x+1$ Donc $x=4$ est une solution. Si $x=-1$, alors $\sqrt{2x^2-x-3}=\sqrt{2+1-3}=0=-1+1$ Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \qquad \iff \qquad x=4 \ \text{ OU } \ x=-1.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 &\Leftrightarrow \quad 2x^2-x-3=x^2+2x+1 \text{ ET } 2x^2-x-3\geqslant 0 \text{ ET } x+1\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2-3x-4=0 \text{ ET } 2x^2-x-3\geqslant 0 \text{ ET } x\geqslant -1.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2-3x-4=0$, on a $\Delta=9+16=25$. Donc les racines associées sont $\frac{3+5}{2}=4$ et $\frac{3-5}{2}=-1$. De plus, si Δ' le discriminant de $2x^2-x-3$, $\Delta'=1+24=25$. Donc les racines associées sont $\frac{1-5}{4}=-1$ et $\frac{1+5}{4}=\frac{3}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 &\Leftrightarrow \quad (x=-1 \text{ OU } x=4) \text{ ET } \left(x\leqslant -1 \text{ OU } x\geqslant \frac{3}{2}\right) \text{ ET } x\geqslant -1\\ &\Leftrightarrow \quad x=-1 \text{ OU } x=4\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2-x-3}=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x=4 \text{ OU } x=-1.}$$

5.5 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}x=-1+\sqrt{x^2-2} &\Rightarrow x+1=\sqrt{x^2-2}\\ &\Rightarrow x^2+2x+1=x^2-2\\ &\Rightarrow x=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Synthèse : si $x=-\frac{3}{2}$, on a $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\neq -\frac{1}{2}=1+x$ Donc $x=-\frac{3}{2}$ n'est pas solution. Conclusion, $\boxed{x=-1+\sqrt{x^2-2} \text{ n'admet aucune solution}}$.

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x=-1+\sqrt{x^2-2} &\Leftrightarrow \quad x+1=\sqrt{x^2-2}\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2x+1=x^2-2 \text{ ET } x+1\geqslant 0 \text{ ET } x^2-2\\ &\Leftrightarrow \quad x=-\frac{3}{2} \text{ ET } x\geqslant -1 \text{ ET } x^2\geqslant 2,\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion, $\boxed{x=-1+\sqrt{x^2-2} \text{ n'admet aucune solution}}$.