Interrogation 2 d'entrainement
Fonctions réelles

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
   1.2 Comment obtient-on le graphe de $g_1 : x \mapsto f(x) + a$? de $g_2 : x \mapsto f(x+a)$? de $g_3 : x \mapsto af(x)$? de $g_4 : x \mapsto f(ax)$?
   1.3 Définir une fonction majorée, minorée, bornée. Caractériser par la valeur absolue le fait qu'une fonction soit bornée.
   1.4 Définir une fonction continue en a, dérivable en a. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
   1.5 Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
   1.6 Enoncer le théorème de la bijection (version 2).
   1.7 Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
2. **Déterminer l'ensemble de définition et la parité d'une fonction.**
   2.1 Soit $f : x \mapsto \frac{2\ln\left(x^2-5\right)}{\tan(3x)}$. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité.
   2.2 Soit $f : x \mapsto \frac{7x^3-3x+1}{x^4+x^2+1}$. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité.
   2.3 Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3x^3+1}+\mathrm{e}^{-3x^3+1}}{\sin(2x)}$. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité.
   2.4 Soit $f : x \mapsto \frac{3|x|^3+\cos(6x)}{\cos(2x)}$. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité.
   2.5 Soit $f : x \mapsto \ln\left(|x+2| - (x+3)\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité.
3. **Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection.**
   3.1 Montrer que l'équation $\sin(4x) + 5x^2 = 2$ admet une solution sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
   3.2 Montrer que l'équation $\left(\frac{1}{5\sqrt{x}+3}\right)^2 = \frac{1}{10}$ admet une solution sur $[0\,;\,+\infty[$.
   3.3 Montrer que l'équation $4\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2019$ admet une solution sur $[0\,;\,+\infty[$.
   3.4 Montrer que l'équation $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1} = 4$ admet une unique solution sur $[3\,;\,+\infty[$.
   3.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}$ définit une bijection sur $[0\,;\,n]$ dans un ensemble que l'on précisera. Que peut-on dire de f^{-1} ?
   3.6 Montrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x > \ln(x)$. Puis montrer que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)}$ définit une bijection sur $[\mathrm{e}\,;\,10]$ dans un ensemble que l'on précisera. Que peut-on dire de f^{-1} ?

4. **Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.**

   4.1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2+2x+1 \end{cases}$. Déterminer $f\left([-1\,;\,6]\right)$ et $f^{\leftarrow}\left([-1\,;\,1]\right)$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

   4.2 Soit $f : \begin{cases}]-\infty\,;\,3[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3-x)+4 \end{cases}$. Déterminer $f\left(\left[-7\,;\,-\frac{3}{4}\right]\right)$ et $f^{\leftarrow}\left([5\,;\,11]\right)$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

   4.3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$. Déterminer $f\left(\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]\right)$ et $f^{\leftarrow}\left([-1\,;\,0]\right)$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

   4.4 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 4-7x^2+21x \end{cases}$. Déterminer $f\left([-2\,;\,2]\right)$ et $f^{\leftarrow}\left(]-\infty\,;\,18]\right)$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

   4.5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^{5x+2}-2 \end{cases}$. Déterminer $f\left([0\,;\,8]\right)$ et $f^{\leftarrow}\left([-7\,;\,-2]\right)$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

5. **Comparaison asymptotique.**

   5.1 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto x^2+3x+1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^3+5x^2-3x+2}$.

   5.2 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

   5.3 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{3}{x^2}}$ et $g : x \mapsto x^2$.

   5.4 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

   5.5 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto 3x+\sqrt{x^6+2x^2}$ et $g : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$.