Correction de l'interrogation 2 d'entrainement Fonctions réelles

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soients $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.

- L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$

- L'image réciproque de B par f est

$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$

1.2 A partir du graphe de f, on obtient le graphe de

- g_1 par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- g_2 par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- g_3 par une dilatation/contraction verticale de coefficient a.
- g_4 par une dilatation/contraction horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$.

1.3 Soients $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
f \text{ est majorée sur } U & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad f(x) \leqslant M \\
f \text{ est minorée sur } U & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \\
f \text{ est bornée sur } U & \Leftrightarrow & \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \\
 & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in U, \quad |f(x)| \leqslant M.
\end{array}$$

1.4 Soients $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$\begin{array}{rcl}
f \text{ continue en } a & \Leftrightarrow & \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \\
f \text{ est dérivable en } a & \Leftrightarrow & \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.
\end{array}$$

En particulier

$$(\ f \text{ dérivable en } a\ ) \quad \Rightarrow \quad (\ f \text{ continue en } a\ ).$$

1.5 Soients $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{F}([a; b], \mathbb{R})$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors,

$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], (\text{ ou } [f(b); f(a)]),\ \exists c \in [a; b], \qquad f(c) = \lambda.$$

1.6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si f est continue sur I et strictement monotone sur I alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

1.7 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $J = f(I)$. On suppose que f strictement monotone et dérivable sur I. Si de plus pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} existe, est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

2. **Déterminer l'ensemble de définition et la parité d'une fonction.**

2.1 Soit $f : x \mapsto \frac{2\ln\left(x^2-5\right)}{\tan(3x)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{D}_f \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-5>0 \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \tan(3x) \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2>5 \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>\sqrt{5} \quad \text{OU} \quad x<-\sqrt{5} \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>\sqrt{5} \quad \text{OU} \quad x<-\sqrt{5} \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\frac{\pi}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble de définition de f est

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}\,;\,+\infty\right[\setminus \left\{ k\frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(i) On note que $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned}
f(-x) = \frac{2\ln\left((-x)^2-5\right)}{\tan(3(-x))} &= \frac{2\ln\left(x^2-5\right)}{-\tan(3x)} \qquad \text{car la fonction tangente est impaire.} \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

2.2 Soit $f : x \mapsto \frac{7x^3-3x+1}{x^4+x^2+1}$. Soit Δ le discriminant de X^2+X+1. On a $\Delta = 1-4<0$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}$, $u^2+u+1>0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, (en prenant $u=x^2$), on a $x^4+x^2+1>0$. Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

(i) On note que $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.

(ii) Cependant on a $f(1) = \frac{7-3+1}{1+1+1} = \frac{5}{3}$ et $f(-1) = \frac{-7+3+1}{1+1+1} = -1$. Donc $f(-1) \neq -f(1)$ et la fonction f n'est pas impaire et $f(-1) \neq f(1)$ donc la fonction f n'est pas paire.

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

2.3 Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3x^3+1}+\mathrm{e}^{-3x^3+1}}{\sin(2x)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ 2x \neq k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(i) On note que $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned}
f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{3(-x)^3+1}+\mathrm{e}^{-3(-x)^3+1}}{\sin(-2x)} &= \frac{\mathrm{e}^{-3x^3+1}+\mathrm{e}^{3x^3+1}}{-\sin(2x)} \qquad \text{car la fonction sinus est impaire} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{3x^3+1}+\mathrm{e}^{-3x^3+1}}{\sin(2x)} \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

2.4 Soit $f : x \mapsto \frac{3|x|^3+\cos(6x)}{\cos(2x)}$. Soit $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(i) On note que $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) = \frac{3|-x|^3 + \cos(-6x)}{\cos(-2x)} &= \frac{3|x|^3 + \cos(6x)}{\cos(2x)} \qquad \text{car la fonction cosinus est paire} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

2.5 Soit $f : x \mapsto \ln(|x+2| - (x+3))$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| - (x+3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| > x+3.$$

Premier cas, $x \geqslant -2$, alors

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad x+2 > x+3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > 3 \quad \text{impossible.}$$

Second cas, $x \leqslant -2$, alors

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad -x-2 > x+3 \quad \Leftrightarrow \quad -5 > 2x \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{5}{2}.$$

Or $-\frac{5}{2} < -2$.
Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty\,;\, -\frac{5}{2}\right[.}$$

On note que $\mathscr{D}_f$ n'est pas centré en 0 (pire ne contient aucun réel positif) il n'y a donc aucune chance que f soit paire ou impaire. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. **Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection.**

3.1 Pour tout $x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f(x) = \sin(4x) + 5x^2$.

(i) La fonction f est continue sur $\left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme de fonctions continues.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = 0 < 2$ et si $x = \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi) + 5\frac{\pi^2}{4} = 5\frac{\pi^2}{4} > 5\frac{3^2}{4} > 5\frac{2^2}{4} = 5 > 2$. Donc $2 \in \left[f(0)\,;\, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(c) = 2$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } \sin(4x) + 5x^2 = 2 \text{ admet (au moins) une solution sur } \left[0\,;\, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

3.2 Pour tout $x \in [0\,;\, +\infty[$, on pose $f(x) = \left(\frac{1}{5\sqrt{x}+3}\right)^2$ (bien défini car $x \geqslant 0$ et $5\sqrt{x} + 3 \geqslant 3 > 0$).

(i) La fonction f est continue sur $[0\,;\, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = \frac{1}{9} > \frac{1}{10}$ et si $x = 1$ (par exemple), $f(1) = \frac{1}{64} < \frac{1}{10}$. Donc $\frac{1}{10} \in [f(1)\,;\, f(0)]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0\,;\,1] \subseteq [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(c) = \frac{1}{10}$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } \left(\frac{1}{5\sqrt{x}+3}\right)^2 = \frac{1}{10} \text{ admet (au moins) une solution sur } [0\,;\,+\infty[.}$$

3.3 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$, on pose $f(x) = 4\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

(i) La fonction f est continue sur $[0\,;\,\pi[$ en tant que composée de fonctions continues.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = 0 < 2019$ et si $x \to \pi$, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x) = +\infty$. Donc il existe $x_0 \in [0\,;\,\pi[$ tel que pour tout $x \in [x_0\,;\,\pi[$, $f(x) \geqslant 2019$, notamment si $x = x_0$, $f(x_0) \geqslant 2019$ (attention nous n'avons pas montré que $f(x_0) = 2019$ faites bien la distinction). Ainsi $2019 \in [f(0)\,;\,f(x_0)]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0\,;\,x_0] \subseteq [0\,;\,\pi[\subseteq [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(c) = 2019$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } 4\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2019 \text{ admet (au moins) une solution sur } [0\,;\,+\infty[.}$$

En réalité cette équation va admettre une infinité de solutions sur $[0\,;\,+\infty[$ *par la* π*-périodicité de la fonction tangente mais une seule sur* $[0\,;\,\pi[$ *en appliquant le théorème de la bijection.*

3.4 L'unicité demandée réclame le théorème de la bijection et non juste le théorème des valeurs intermédiaires. Pour tout $x \in [3\,;\,+\infty[$, on pose $f(x) = \frac{e^x}{x^2-1}$ qui est bien défini car pour tout $x \geqslant 3$, $x^2 - 1 \geqslant 8 > 0$. De plus la fonction f est dérivable sur $[3\,;\,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in [3\,;\,+\infty[\,, \qquad f'(x) = \frac{e^x\left(x^2-1\right) - e^x\,(2x)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 - 2X - 1$, $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$, donc les solutions réelles de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$$

Or $x_1 < x_2 < \frac{2+3}{2} < 3$. Donc pour tout $x \in [3\,;\,+\infty[$, $x^2 - 2x - 1 > 0$ et par suite,

$$\forall x \in [3\,;\,+\infty[\,, \qquad f'(x) > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$. De plus $f(3) = \frac{e^3}{8}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	3	$+\infty$
f	$\frac{e^3}{8}$ $\nearrow$	$+\infty$

(i) La fonction f est continue sur $[3\,;\,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii) Si $x = 3$, $f(3) = \frac{e^3}{8} < \frac{3^3}{8} = \frac{27}{8} < 4$ donc $4 \in \left[\frac{e^3}{8}\,;\,+\infty\right[= [f(3)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)[$.

(iii) La fonction f est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$

Donc par le théorème de la bijection, il existe un unique $c \in [3\,;\,+\infty[$ tel que $f(c) = 4$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } \frac{e^x}{x^2-1} = 4 \text{ admet une unique solution sur } [3\,;\,+\infty[.}$$

3.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. La fonction f est bien définie et même continue et dérivable sur $[0\,;\,n]$ et

$$\forall x \in [0\,;\,n]\,, \qquad f'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}e^{-x}(n-x)}{n!}.$$

Or pour tout $x \in]0\,;\,n[$, $x^{n-1} > 0$ et $n - x > 0$ (attention à bien extraire les bords dans ce cas pour obtenir de la stricte positivité et donc de la stricte monotonie sans quoi le théorème de la bijection ne s'applique pas). Donc

$$\forall x \in]0\,;\,n[\,, \qquad f'(x) > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,n]$. De plus, $f(0) = 0$ (car $n \geqslant 1$) et $f(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$. Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		n
f	0	$\nearrow$	$\frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}$

Résumons,

(i) La fonction f est continue sur $[0\,;\,n]$.

(ii) $f(0) = 0$ et $f(n) = \frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}$.

(iii) La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,n]$.

> Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction f est une bijection de $[0\,;\,n]$ dans $\left[0\,;\,\frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}\right]$. De plus f^{-1} est une fonction continue sur $\left[0\,;\,\frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}\right]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

3.6 Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = x - \ln(x)$. La fonction u est bien définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Donc pour tout $x \in \,]0\,;\,1[$, $u'(x) < 0$ et pour tout $x \in \,]1\,;\,+\infty[$, $u'(x) > 0$ et la fonction u est donc strictement décroissante sur $]0\,;\,1[$ et strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = +\infty$, $u(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}) = +\infty$. Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) \geqslant 1 > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \,]0\,;\,+\infty[\,, \qquad x > \ln(x).}$$

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$. Par ce qui précède, f est bien définie sur $]0\,;\,+\infty[$ et est même continue et dérivable sur cet ensemble et pour tout $x\,]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\left(x - \ln(x)\right) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \ln(x)\right)^2} = \frac{x - \ln(x) - \ln(x)\,(x-1)}{x\left(x - \ln(x)\right)^2} = \frac{x - x\ln(x)}{x\left(x-\ln(x)\right)^2} = \frac{1-\ln(x)}{\left(x - \ln(x)\right)^2}.$$

Or pour tout $x > e$, $\ln(x) > 1$ i.e. $1 - \ln(x) < 0$ et donc $f'(x) < 0$ et la fonction f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ et donc notamment sur $[\mathrm{e}\,;\,10]$. De plus $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$ et $f(10) = \frac{\ln(10)}{10-\ln(10)}$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	e		10
f	$\frac{1}{\mathrm{e}-1}$	$\searrow$	$\frac{\ln(10)}{10-\ln(10)}$

Résumons.

(i) La fonction f est continue sur $[\mathrm{e}\,;\,10]$.

(ii) $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$ et $f(10) = \frac{\ln(10)}{10-\ln(10)}$.

(iii) La fonction f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,10]$.

> Donc par le théorème de la bijection, la fonction f est une bijection de $[\mathrm{e}\,;\,10]$ dans $\left[\frac{\ln(10)}{10-\ln(10)}\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right]$. De plus f^{-1} est une fonction continue sur $\left[\frac{\ln(10)}{10-\ln(10)}\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right]$ et strictement décroissante sur cet intervalle.

4. **Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.**

4.1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2+2x+1 \end{cases}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x+2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$. On en déduit donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

De plus $f(-1) = 2-2+1 = 1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$ et $f(6) = 2\times 36 + 12 + 1 = 85$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2+2x+1 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x\,(x+1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x = -1.$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		6		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	85	$\nearrow$	

> On conclut que
> $$f([-1\,;\,6]) = \left[\frac{1}{2}\,;\,85\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}([-1\,;\,1]) = [-1\,;\,0]\,.$$
> La fonction f n'est ni injective (1 admet deux antécédents -1 et 0) ni surjective (-1 n'a aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

4.2 Soit $f : \begin{cases}]-\infty\,;\,3[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3-x)+4 \end{cases}$. La fonction f est bien définie sur $I = \,]-\infty\,;\,3[$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-1}{3-x} = \frac{1}{x-3} < 0.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I. De plus $f(-7) = \ln(10)+4$, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \ln\left(3+\frac{3}{4}\right)+4 = \ln\left(\frac{15}{4}\right)+4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -\infty$. Enfin pour $x \in I$, on a

$$f(x) = 5 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(3-x)+4 = 5 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(3-x) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 3-x = \mathrm{e} \quad\Leftrightarrow\quad x = 3-\mathrm{e}$$

et

$$f(x) = 11 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(3-x)+4 = 11 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(3-x) = 7 \quad\Leftrightarrow\quad 3-x = \mathrm{e}^7 \quad\Leftrightarrow\quad x = 3-\mathrm{e}^7\,.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$3-\mathrm{e}^7$		-7		$-\frac{3}{4}$		$3-\mathrm{e}$		3
f	$+\infty$	$\searrow$	11	$\searrow$	$\ln(10)+4$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{15}{4}\right)+4$	$\searrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

On conclut que

$$\boxed{f\left(\left[-7\,;\,-\frac{3}{4}\right]\right)=\left[\ln\left(\frac{15}{4}\right)+4\,;\,\ln(10)+4\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}([5\,;\,11])=\left[3-\mathrm{e}^7\,;\,3-\mathrm{e}\right].}$$

De plus la fonction est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,3[$. Donc par le théorème de la bijection, f est une bijection de $]-\infty\,;\,3[$ dans $\left]\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)\,;\,\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bijective et donc surjective et injective.}}$

4.3 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$. La fonction cosinus étant strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$ et de plus $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. On a donc

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
f	2	$\searrow$	0

Ainsi,

$$\boxed{f\left(\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]\right)=[0\,;\,2].}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
x\in f^{\leftarrow}([-1\,;\,0]) &\Leftrightarrow f(x)\in[-1\,;\,0]\\
&\Leftrightarrow -1\leqslant 2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \begin{array}{ll} & \exists k\in\mathbb{Z},\, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \text{OU} & \\ & \exists k\in\mathbb{Z},\, \frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant \frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\\
&\Leftrightarrow \begin{array}{ll} & \exists k\in\mathbb{Z},\, -\frac{5\pi}{12}+2k\pi\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{OU} & \\ & \exists k\in\mathbb{Z},\, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant \frac{11\pi}{12}+2k\pi\end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{\leftarrow}([-1\,;\,0])=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\,;\,-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,;\,\frac{11\pi}{12}+2k\pi\right]\right).$$

Enfin, la fonction f n'est pas injective (car 2π-périodique $f(0)=f(2\pi)$) ni surjective (3 n'a pas d'antécédent car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leqslant 2$) et donc a fortiori, f n'est pas bijective.

4.4 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 4-7x^2+21x\end{cases}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-14x+21$. Donc pour $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -14x+21\geqslant 0 \Leftrightarrow 21\geqslant 14x \Leftrightarrow x\leqslant\frac{3}{2}$. Donc

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 4-28-42 = -66$, $f(2) = 4-28+42 = 18$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 - \frac{63}{4} + \frac{63}{2} = 4 + \frac{63}{4} = \frac{79}{4}$. Enfin pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 18 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 7x^2 + 21x = 18 \quad & \Leftrightarrow \quad 7x^2 - 21x + 14 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (x+2)(x+1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{OU} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-66	$\nearrow$	18	$\nearrow$	$\frac{79}{4}$	$\searrow$	18	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi,

$$f([-2\,;\,2]) = \left[-66\,;\,\frac{79}{4}\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}(]-\infty\,;\,18]) =]-\infty\,;\,-1] \cup [2\,;\,+\infty[$$

De plus, f n'est pas injective (18 admet deux antécédents) ni surjective ($20 = \frac{80}{4} > \frac{79}{4}$ n'admet aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

4.5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^{5x+2} - 2 \end{cases}$. Les fonctions $x \mapsto 5x+2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x-2$ étant strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, donc par la stricte croissance de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > -2$. Donc $f^{\leftarrow}([-7\,;\,-2]) = \emptyset$. De plus $f(0) = \mathrm{e}^2 - 2$, $f(8) = \mathrm{e}^{42} - 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	$\mathrm{e}^2 - 2$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{42} - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion,

$$f([0\,;\,8]) = \left[\mathrm{e}^2 - 2\,;\,\mathrm{e}^{42} - 2\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}([-7\,;\,-2]) = \emptyset.$$

La fonction f est injective sur $\mathbb{R}$ (par sa stricte croissance et le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-2\,;\,+\infty[$) mais n'est pas surjective (-3 n'admet aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

5. **Comparaison asymptotique.**

5.1 On a les égalités suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-3x+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = 1.$$

Donc par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}} = 1$ puis par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(x)\right).}$$

5.2 Posons $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a alors les égalités suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{\sin(3u)}{u^2} = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{\sin(3u)}{3u}\frac{3u}{u^2}.$$

Or d'après le cours, en posant $v = 3u \underset{u\to0}{\longrightarrow} 0$, $\lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{\sin(3u)}{3u} = \lim\limits_{v\to0} \frac{\sin(v)}{v} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{3u}{u^2} = \lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{3}{u} = +\infty$. Donc par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(x)\right).}$$

5.3 Posons $u = \frac{1}{x^2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, on a

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{x^2}}}{x^2} = \lim_{u\to+\infty} u\,\mathrm{e}^{-3u} = 0, \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} o\left(g(x)\right).}$$

5.4 Posons $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$. Alors,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u} = \lim_{u\to+\infty} -2\frac{\ln(u)}{u}.$$

Donc par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} o\left(g(x)\right).}$$

5.5 Pour tout $x \neq 0$, au voisinage de 0, on a les égalités suivantes :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{3x + \sqrt{x^6 + 2x^2}} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} \frac{x^2}{3x + \sqrt{2}\,|x|\,\sqrt{1 + \frac{x^4}{2}}} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2}|x|}{x^2}\sqrt{1 + \frac{2}{x^4}}}.$$

Or, en posant $u = x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, d'après le cours,

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{u\to0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

De plus $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2}\,|x|}{x^2}\sqrt{1 + \frac{2}{x^4}}\right) = 0$. Donc par produit,

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to0}{=} o\left(f(x)\right).}$$