Correction de l'interrogation 5 d'entrainement
Calcul algébrique

1. **Restituer le cours.**

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1.2 Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$. On a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

1.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

1.4 Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.5 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. **Reconnaitre une somme usuelle.**

2.1 Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+2} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+2} - a_{k+1} + a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+2} - a_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k).$$

On reconnait alors deux sommes télescopiques. Donc

$$S_n = a_{n+2} - a_1 + a_{n+1} - a_0.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = a_{n+2} + a_{n+1} - a_1 - a_0.}$$

2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a les égalités suivantes :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}.$$

On reconnait alors un produit télescopique. Par conséquent

$$\boxed{P_n = \frac{1}{n}.}$$

2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\cos(k)-\cos(k+1)}{2}$. On obtient donc une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \sin\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\cos(k)-\cos(k+1)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(0)-\cos(n+2)\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{1-\cos(n+2)}{2}.}$$

2.4 Soit $(s,b) \in \mathbb{N}^2$. On a les égalités suivantes :

$$S_s = \sum_{u=2}^{s}\binom{s}{u}\left(3\times 5^u\right)^b = \sum_{u=2}^{s}\binom{s}{u}\underbrace{3^b}_{\text{indépendant de } u}\times 5^{ub} = 3^b\sum_{u=2}^{s}\binom{s}{u}\left(5^b\right)^u\times 1^{s-u}.$$

On reconnait alors un binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S_s &= 3^b\left(\sum_{u=0}^{s}\binom{s}{u}\left(5^b\right)^u\times 1^{s-u} - \binom{s}{0}\left(5^b\right)^0 - \binom{s}{1}\left(5^b\right)^1\right)\\ &= 3^b\left(\left(5^b+1\right)^s - 1 - s5^b\right)\\ &= 3^b\left(5^b+1\right)^s - 3^b - s15^b. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_s = 3^b\left(5^b+1\right)^s - 3^b - s15^b.}$$

2.5 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=-2}^{n}(k+a)^3\\ &= \sum_{k=-2}^{n}\left(k^3+3ak^2+3a^2k+a^3\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3ak^2+3a^2k+a^3\right) + (-1)^3 + 3a(-1)^2 + 3a^2(-1) + a^3\\ &\qquad + (-2)^3 + 3a(-2)^2 + 3a^2(-2) + a^3\\ &= \sum_{k=0}^{n}k^3 + 3a\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3a^2\sum_{k=0}^{n}k + a^3\sum_{k=0}^{n}1 - 1 + 3a - 3a^2 + a^3 - 8 + 12a - 6a^2 + a^3\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 3a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3a^2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)a^3 - 9 + 15a - 9a^2 + 2a^3 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 9 + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+15\right)a + \left(\frac{3n(n+1)}{2}-9\right)a^2 + (n+3)a^3.}$$

3. **Savoir faire un changement d'indice.**

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le glissement d'indice $\tilde{k} = 2n-4+k$, on a :

$$\begin{aligned} P_n = \prod_{k=0}^{n}(2n-4+k) = \prod_{\tilde{k}=2n-4}^{3n-4}\tilde{k} &= \prod_{k=2n-4}^{3n-4}k \qquad \text{car l'indice de sommation est muet.}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{3n-4}k}{\prod_{k=1}^{2n-5}k} = \frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P_n = \frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}.}$$

3.2 Tout d'abord, on a
$$S=\sum_{k=0}^{100}\left(\sqrt{102-k}-\sqrt{k}\right)=\sum_{k=0}^{100}\sqrt{102-k}-\sum_{k=0}^{100}\sqrt{k}.$$
On effectue l'inversion d'indice $\tilde{k}=102-k$ dans la première somme. On obtient alors
$$\begin{aligned}S=\sum_{\tilde{k}=2}^{102}\sqrt{\tilde{k}}-\sum_{k=0}^{100}\sqrt{k}=\sum_{k=2}^{102}\sqrt{k}-\sum_{k=0}^{100}\sqrt{k}\qquad&\text{car l'indice de sommation est muet}\\ =\sqrt{102}+\sqrt{101}+\sum_{k=2}^{100}\sqrt{k}-\sum_{k=2}^{100}\sqrt{k}-\sqrt{1}-\sqrt{0}&\\ =\sqrt{102}+\sqrt{101}-1.&\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{S=\sqrt{102}+\sqrt{101}-1.}$$

3.3 Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. On n'effectue pas pas de glissement d'indice mais l'inversion d'indice suivante : $\tilde{k}=n+p-k$. On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+p}{k}=\sum_{\tilde{k}=p}^{n+p}\binom{n+p}{n+p-\tilde{k}}&=\sum_{k=p}^{n+p}\binom{n+p}{n+p-k}\qquad\text{car l'indice de sommation est muet}\\ &=\sum_{k=p}^{n+p}\binom{n+p}{n+p-(n+p-k)}\\ &=\sum_{k=p}^{n+p}\binom{n+p}{k}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+p}{k}=\sum_{k=p}^{n+p}\binom{n+p}{k}.}$$

3.4 Soit $(m,p)\in\mathbb{N}^2$, $p\geqslant m+1$. On effectue le glissement d'indice $\tilde{n}=n+m$:
$$\sum_{n=0}^{p-m}\mathrm{e}^{\pi(n+m)^2}=\sum_{\tilde{n}=m}^{p}\mathrm{e}^{\pi(\tilde{n})^2}=\sum_{k=m}^{p}\mathrm{e}^{\pi k^2}\qquad\text{car l'indice de sommation est muet.}$$
Par conséquent,
$$\sum_{n=0}^{p-m}\mathrm{e}^{\pi(n+m)^2}-\sum_{k=m}^{p-1}\mathrm{e}^{\pi k^2}=\sum_{k=m}^{p}\mathrm{e}^{\pi k^2}-\sum_{k=m}^{p-1}\mathrm{e}^{\pi k^2}=\mathrm{e}^{\pi p^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n=0}^{p-m}\mathrm{e}^{\pi(n+m)^2}-\sum_{k=m}^{p-1}\mathrm{e}^{\pi k^2}=\mathrm{e}^{\pi p^2}.}$$

3.5 Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $n\geqslant p\geqslant 1$. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\sin(k+p)-\sin(k)\right]$. On a
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k+p)-\sum_{k=0}^{n}\sin(k).$$

On effectue le glissement d'indice $\tilde{k} = k + p$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\tilde{k}=p}^{n+p} \sin\left(\tilde{k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \sin(k) \\
&= \sum_{k=p}^{n+p} \sin(k) - \sum_{k=0}^{n} \sin(k) \qquad \text{car l'indice de sommation est muet} \\
&= \sum_{k=p}^{n} \sin(k) + \sum_{k=n+1}^{n+p} \sin(k) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k) - \sum_{k=p}^{n} \sin(k) \qquad \text{par la relation de Chasles} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} \sin(k) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k).
\end{aligned}$$

On effectue alors un nouveau glissement d'indice $\tilde{k} = k - n - 1$ dans la première somme :

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=0}^{p-1} \sin\left(\tilde{k} + n + 1\right) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k + n + 1) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k).$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} [\sin(k+p) - \sin(k)] = \sum_{k=0}^{p-1} [\sin(k+n+1) - \sin(k)].}$$

4. **Sommes doubles rectangulaires.**

4.1 Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *Méthode 1.* On a

$$\begin{aligned}
S_{n,m} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (2i - j) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (2i - j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(2 \sum_{i=1}^{n} i - j \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} - nj\right) \\
&= n(n+1) \sum_{j=1}^{m} 1 - n \sum_{j=1}^{m} j \\
&= mn(n+1) - n \frac{m(m+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_{n,m} = nm \frac{2n - m + 1}{2}.}$$

Méthode 2. On a

$$\begin{aligned}
S_{n,m} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (2i - j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (2i - j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(2i \sum_{j=1}^{m} 1 - \sum_{j=1}^{m} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(2mi - \frac{m(m+1)}{2}\right) \\
&= 2m \sum_{i=1}^{n} i - \frac{m(m+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 2m \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} n.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_{n,m} = nm\frac{2n-m+1}{2}.}$$

4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On est dans le cas où les variables sont séparées. On a donc :

$$S_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)\left(\sum_{j=1}^n j^3\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3.}$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$(i+2j)^3 = i^3 + 3i^2(2j) + 3i(2j)^2 + (2j)^3 = i^3 + 6i^2j + 12ij^2 + 8j^3.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+2j)^3 \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(i^3 + 6i^2j + 12ij^2 + 8j^3\right) \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^3 + 6\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2j + 12\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^2 + 8\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^3 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n i^3\right)\left(\sum_{j=1}^n 1\right) + 6\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n j\right) + 12\left(\sum_{i=1}^n i\right)\left(\sum_{j=1}^n j^2\right) + 8\left(\sum_{i=1}^n 1\right)\left(\sum_{j=1}^n j^3\right) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 n + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2} + 12\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 8n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= n^2(n+1)^2\left[\frac{n}{4} + \frac{2n+1}{2} + 2n+1+2n\right] \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[n+4n+2+8n+4+8n\right]
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{n^2(n+1)^2(21n+6)}{4}.}$$

4.4 Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a, en utilisant à plusieurs reprises la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
S_{n,m} &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \binom{n}{i}\binom{m}{j}\left(3^i + 5^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \left(\binom{n}{i}\binom{m}{j}3^i + \binom{n}{i}\binom{m}{j}5^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i}3^i\sum_{j=1}^m\binom{m}{j} + \binom{n}{i}\sum_{j=1}^m\binom{m}{j}5^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i}3^i\left[\sum_{j=0}^m\binom{m}{j} - 1\right] + \binom{n}{i}\left[\sum_{j=0}^m\binom{m}{j}5^j - 1\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i}3^i\left[(1+1)^m - 1\right] + \binom{n}{i}\left[(5+1)^m - 1\right]\right) \\
&= (2^m-1)\sum_{i=1}^n\binom{n}{i}3^i + (6^m-1)\sum_{i=1}^n\binom{n}{i} \\
&= (2^m-1)\left((3+1)^n - 1\right) + (6^m-1)\left((1+1)^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_{n,m} = (2^m - 1)(4^n - 1) + (6^m - 1)(2^n - 1)\,.}$$

4.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$$S_n = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \cos\left((l+k)\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i(l+k)\frac{\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \mathrm{e}^{il\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}}\right)$$

Les variables étant séparées,

$$S_n = \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{e}^{il\frac{\pi}{3}}\right)\right].$$

L'indice de sommation étant muet, on peut également écrire que

$$S_n = \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{e}^{il\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{e}^{il\frac{\pi}{3}}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{e}^{il\frac{\pi}{3}}\right)^2\right].$$

On reconnait à l'intérieur une somme géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$. L'indice commençant en 1, on a *(Rappel somme géométrique = premier terme* $\times$ $\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$*)*

$$S_n = \mathrm{Re}\left[\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,\frac{1-\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{3}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^2\right]$$

Par la factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Re}\left[\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,\frac{\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}\,\frac{\mathrm{e}^{-in\frac{\pi}{6}} - \mathrm{e}^{in\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^2\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\left(\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}\,\frac{-2i\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}\,\frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right].
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 4\cos\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(n\frac{\pi}{6}\right).}$$

5. **Sommes doubles triangulaires.**

5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j-1} &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j-1} \\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1}\,\frac{(j-1)\,j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j.
\end{aligned}$$

On pose $k = j-1$ *on peut aussi se contenter d'ajouter/enlever le premier terme puis de factoriser le résultat obtenu mais connaissant votre goût pour le changement d'indice je prends cette dernière méthode).* Alors

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)\,n}{2} + n - 1\right) = \frac{(n-1)(n+2)}{4}.$$

Conclusion, $\boxed{S_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{4}}$.

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre entiers suivantes :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (n-i)\, j &= \sum_{j=2}^{n} j \sum_{i=1}^{j-1} (n-i) \\ &= \sum_{j=2}^{n} j \left(n(j-1) - \frac{(j-1)\, j}{2} \right) \\ &= \sum_{j=2}^{n} j\,(j-1)\, \frac{2n-j}{2} \end{aligned}$$

On pose $k = j-1$ *on peut toujours se contenter d'ajouter/enlever le premier terme puis de factoriser le résultat obtenu)*. On a alors,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\, k \frac{2n-k-1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k^2+k\right)(2n-k-1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(2n-1)\, k^2 + (2n-1)\, k - k^3 - k^2\right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(2n-2)\, k^2 + (2n-1)\, k - k^3\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(2n-2) \frac{(n-1)\, n\,(2n-1)}{6} + (2n-1) \frac{(n-1)\, n}{2} - \left(\frac{(n-1)\, n}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{(n-1)\, n}{24} \left[4(n-1)(2n-1) + 6(2n-1) - 3(n-1)\, n\right] \\ &= \frac{(n-1)\, n}{24} \left[8n^2 - 12n + 4 + 12n - 6 - 3n^2 + 3n\right] \\ &= \frac{(n-1)\, n}{24} \left[5n^2 + 3n - 2\right]. \end{aligned}$$

On remarque que -1 est une racine de $5x^2+3x-2$. Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{(n-1)\, n\,(n+1)(5n-2)}{24}.}$$

5.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre entiers suivantes :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij &= \sum_{j=1}^{n} j \frac{j\,(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(j^3 + j^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{n(n+1)}{24} \left[3n^2 + 3n + 4n + 2\right]. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x \mapsto 3x^2 + 7x + 2$. On a $\Delta = 49 - 24 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{-7-5}{6} = -2$ et $\frac{-7+5}{6} = -\frac{1}{3}$. On obtient donc la factorisation suivante :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)\, 3\left(n+\frac{1}{3}\right)(n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{24}.}$$

5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} q^{i+j} = \sum_{j=1}^{n} q^j \sum_{i=1}^{j} q^i.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $q \neq 1$. Donc

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} q^j q \frac{q^j - 1}{q-1} = \frac{q}{q-1} \sum_{j=1}^{n} q^{2j} - \frac{q}{q-1} \sum_{j=1}^{n} q^j$$

On reconnait à nouveau des sommes géométriques de raison $q^2 \neq 1$ et $q \neq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{q}{q-1} q^2 \frac{q^{2n}-1}{q^2-1} - \frac{q}{q-1} q \frac{q^n - 1}{q-1} \\ &= \frac{q^2}{(q-1)^2 (q+1)} \left(q^{2n+1} - q - (q+1)(q^n - 1) \right) \\ &= \frac{q^2}{(q-1)^2 (q+1)} \left(q^{2n+1} - q^{n+1} - q^n + 1 \right) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{q^2 \left(q^{2n+1} - q^{n+1} - q^n + 1 \right)}{(q-1)^2 (q+1)}.}$$

On peut vérifier son résultat en prenant $n = 1$.

5.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i^2}{2j-1} &= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{2j-1} \sum_{i=1}^{j-1} i^2 \\ &= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{2j-1} \frac{(j-1) j (2j-1)}{6} \\ &= \sum_{j=2}^{n} \frac{j^2 - j}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=2}^{n} j^2 - \frac{1}{6} \sum_{j=2}^{n} j \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{36} [2n + 1 - 3]. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{18}.}$$