Correction de l'interrogation 7 d'entrainement
Equations et géométrie complexes

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnu $\omega \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions données par :
$$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\,\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$

1.2 Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement deux solutions données par
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$
où δ est UNE racine carrée de Δ.

1.3 Soient $(s,p) \in \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $z^2 - sz + p$. Alors,
$$z_1 + z_2 = s \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = p.$$

1.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\mathbb{U}_n = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \,\}.$$
De plus, pour tout $(z,z') \in \mathbb{U}_n$, on a
$$zz' \in \mathbb{U}_n, \qquad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}_n.$$

1.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a l'égalité suivante :
$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.$$

1.6 On a $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. De plus,
$$j^2 = \overline{j}, \qquad j^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + j + j^2 = 0.$$

1.7 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

1.8 Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a
$$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

2. **Racines carrées d'un complexe.**

2.1 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
z^2 = 16 - 30i \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (x+iy)^2 &= 16 - 30i \\ |z|^2 &= |16 - 30i| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 &= 16 \\ 2xy &= -30 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = \sqrt{4 \times 289} = 2 \times 17 = 34 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 &= 25 \\ y^2 &= 9 \\ xy &= -15 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \text{OU} \qquad \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 = 16 - 30i \quad \Leftrightarrow \quad z = 5 - 3i \quad \text{OU} \quad z = -5 + 3i.}$$

2.2 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2 = 2 + i \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 & = 2 + i \\ |z|^2 & = |2 + i| \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 & = 2 \\ 2xy & = 1 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{5} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 & = \frac{\sqrt{5}+2}{2} \\ y^2 & = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \\ 2xy & = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \end{cases} \quad \text{car } xy \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 = 2 + i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.}$$

2.3 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3} - i} \quad & \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} \\
& \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}} \\
& \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}} \\
& \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{24}} \quad \text{OU} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{e}^{-i\frac{19\pi}{24}}
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3} - i} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2} \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{24}} \quad \text{OU} \quad z = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2} \mathrm{e}^{-i\frac{19\pi}{24}}.}$$

2.4 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2 = 3 - i \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 & = 3 - i \\ |z|^2 & = |3 - i| \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 & = 3 \\ 2xy & = -1 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{10} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 & = \frac{\sqrt{10}+3}{2} \\ y^2 & = \frac{\sqrt{10}-3}{2} \\ 2xy & = -1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \end{cases} \quad \text{car } xy \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 = 3 - i \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \qquad \text{OU} \qquad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}.}$$

2.5 Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque $\frac{\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}}{2} = \frac{6\pi}{18} = \frac{3\pi}{9}$ On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}} + \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{9}} \qquad &\Leftrightarrow \qquad z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{9}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{9}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{9}}\right) \\ &\Leftrightarrow \qquad z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\, 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ &\Leftrightarrow \qquad z = \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{OU} \qquad z = \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}, \end{aligned}$$

car $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0$ car $\frac{\pi}{9} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}} + \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{9}} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{OU} \qquad z = \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}.}$$

3. **Racines n-ièmes d'un complexe.**

3.1 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^7 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z^7 = -1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad z^7 = \mathrm{e}^{i\pi} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad z = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^7 + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\}.}$$

3.2 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1+i) \qquad \Leftrightarrow \qquad z^3 = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad z^3 = 2^3\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;2]\!], \qquad z = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1+i) \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0;2]\!] \right\}.}$$

3.3 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^{11} = -5i \qquad &\Leftrightarrow \qquad z^{11} = 5\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;10]\!], \qquad z = 5^{\frac{1}{11}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\pi}{22}+\frac{2k\pi}{11}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^{11} = -5i \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ 5^{\frac{1}{11}}\,\mathrm{e}^{i\frac{(3+4k)\pi}{22}} \;\middle|\; k \in [\![0;10]\!] \right\}.}$$

3.4 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (z-i)^7 = (z+i)^7 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \quad z - i = (z+i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}\right) = i\left(1 + \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}\right) \\ &\Leftrightarrow \qquad k = 0 \text{ et donc } 0 = 2i \text{ impossible} \qquad \text{OU} \qquad \exists k \in [\![1;6]\!], \quad z = i\frac{1 + \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![1;6]\!], \quad z = i\frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{7}} + \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{7}} - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}\right)} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![1;6]\!], \quad z = i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \\ &\Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![1;6]\!], \quad z = -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{(z-i)^7 = (z+i)^7 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \;\middle|\; k \in [\![1;6]\!] \right\}.}$$

3.5 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(z+i)^4 = (z+1)^4 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;3]\!], \quad z+i = (z+1)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;3]\!], \quad z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} - i \\
&\Leftrightarrow \quad k=0 \text{ et donc } 0 = 1-i \text{ impossible} \quad \text{OU} \quad \exists k \in [\![1;3]\!], \quad z = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;3]\!], \quad z = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{(k+1)\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{(k-1)\pi}{4}} - \mathrm{e}^{-i\frac{(k-1)\pi}{4}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{4}} - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{4}}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;3]\!], \quad z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \frac{2i\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;3]\!], \quad z = -\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{(z-i)^7 = (z+i)^7 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}} \;\middle|\; k \in [\![1;3]\!] \right\}.}$$

NB : dans ce cas, on peut spécifier les solutions, si $k=1$, $z=0$, si $k=2$, $z = -\frac{1+i}{2}$ et si $k=3$, $z=-1-i$.

4. **Equations complexes du second degré.**

4.1 Considérons l'équation (E) : $z^2 - 5z + 7 + i = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de (E). On a

$$\Delta = 25 - 28 - 4i = -3 - 4i.$$

Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = -3-4i \\ |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Fixons désormais $\delta = 1 - 2i$. Les deux solutions de (E) sont alors données par

$$z_1 = \frac{5-1+2i}{2} = 2+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{5+1-2i}{2} = 3-i.$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 - 5z + 7 + i = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \{2+i\,;\,3-i\}.}$$

4.2 Considérons l'équation (E) : $z^2-(1+2i)\,z+i-1=0$ d'inconnu $z\in\mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de (E). On a

$$\Delta=(1+2i)^2-4i+4=1+4i-4-4i+4=1.$$

Par conséquent les deux solutions de (E) sont

$$z_1=\frac{1+2i+1}{2}=1+i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{1+2i-1}{2}=i.$$

Conclusion, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2-(1+2i)\,z+i-1=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z\in\{1+i\,;\,i\}\,.}$$

4.3 Considérons l'équation (E) : $z^4+4z^2+5=0$ d'inconnu $z\in\mathbb{C}$. Posons $\omega=z^2$ et considérons également l'équation (F) : $\omega^2+4\,\omega+5=0$. Soit Δ le discriminant de (F). On a

$$\Delta=16-20=-4=(2i)^2$$

Par conséquent, les deux solutions de (F) sont données par

$$\omega_1=\frac{-4+2i}{2}=-2+i \qquad \text{et} \qquad \omega_2=\frac{-4-2i}{2}=-2-i.$$

Or z est solution de (E) si et seulement si $\omega=z^2$ est solution de (F). Donc les solutions de (E) sont les racines carrées de ω_1 et de ω_2.
Cherchons les racines carrées de ω_1. Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2=\omega_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+iy)^2=-2+i\\ |z|^2=|\omega_1|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2-y^2=-2\\ 2xy=1\\ x^2+y^2=\sqrt{5}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2=\frac{\sqrt{5}-2}{2}\\ y^2=\frac{\sqrt{5}+2}{2}\\ 2xy=1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases}x=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases} \quad \text{car } xy\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \quad z=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \text{OU} \quad z=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}.
\end{aligned}$$

Cherchons les racines carrées de ω_2. On constate que $\omega_2=\overline{\omega_1}$. Donc on a les équivalences suivantes :

$$z^2=\omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2=\overline{\omega_1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z^2}=\omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}^2=\omega_1\,.$$

Donc par ce qui précède :

$$\begin{aligned}
z^2=\omega_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{z}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \text{OU} \quad \overline{z}=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad z=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \text{OU} \quad z=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, en notant $a=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$ et $b=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\boxed{z^4+4z^2+5=0=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z\in\{a+ib\,;\,-a-ib\,;\,a-ib\,;\,-a+ib\}\,.}$$

4.4 Considérons l'équation (E) : $z^2 - (1+3i)\,z + 4 + 4i = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de (E). On a

$$\Delta = (1+3i)^2 - 16 - 16i = 1 + 6i - 9 - 16 - 16i = -24 - 10i = -2\,(12+5i)\,.$$

Soit $\delta' = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\delta')^2 = 12 + 5i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = 12 + 5i \\ |\delta|^2 = |12+5i| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \frac{25}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \text{car } xy \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \delta' = \frac{5+i}{\sqrt{2}} \quad \text{OU} \quad \delta' = -\frac{5+i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Par conséquent pour $\delta \in \mathbb{C}$,

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \left(\sqrt{2}i\right)\frac{5+i}{\sqrt{2}} = -1 + 5i \quad \text{OU} \quad \delta = -\left(\sqrt{2}i\right)\frac{5+i}{\sqrt{2}} = 1 - 5i.$$

Fixons désormais $\delta = -1 + 5i$. Les deux solutions de (E) sont alors données par

$$z_1 = \frac{1 + 3i - 1 + 5i}{2} = 4i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1 + 3i + 1 - 5i}{2} = 1 - i.$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 - (1+3i)\,z + 4 + 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{4i\ ;\ 1 - i\}\,.}$$

4.5 Considérons l'équation (E) : $z^2 - 2\,(2+i)\,z + 6 + 8i = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de (E). On a

$$\Delta = 4\,(2+i)^2 - 24 - 32i = 4\,(4 + 4i - 1 - 6 - 8i) = 4\,(-3-4i)\,.$$

Soit $\delta' = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\delta')^2 = -3 - 4i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = -3 - 4i \\ |\delta|^2 = |-3-4i| = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \delta' = 1 - 2i \quad \text{OU} \quad \delta' = -1 + 2i
\end{aligned}$$

Par conséquent pour $\delta \in \mathbb{C}$,

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 2\,(1-2i) = 2 - 4i \quad \text{OU} \quad \delta = -2\,(-1+2i) = 2 - 4i.$$

Fixons désormais $\delta = 2 - 4i$. Les deux solutions de (E) sont alors données par

$$z_1 = \frac{4 + 2i + 2 - 4i}{2} = 3 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{4 + 2i - 2 + 4i}{2} = 1 + 3i.$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0 \quad\Leftrightarrow\quad z \in \{3-i\,;\,1+3i\}.}$$

5. **Applications géométriques.**

5.1 Notons z_A, z_B et z_C les affixes de A, B et C respectivement. On remarque que $z_B - z_A = 4+3i-1-i = 3+2i \neq 0$ et

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{5}{2}i - 1 - i}{3+2i} = \frac{5i-2-2i}{2(3+2i)} = \frac{3i-2}{2(3+2i)} = \frac{(3i-2)(3-2i)}{2(9+4)} = \frac{9i+6-6+4i}{26} = \frac{13i}{26} = \frac{i}{2}.$$

$\boxed{\text{Par conséquent } \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et donc } ABC \text{ est rectangle en } A.}$

5.2 Notons z_A, z_B et z_C les affixes de A, B et C respectivement. On remarque que $z_B - z_A = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i \neq 0$ et

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+\sqrt{3} - i(1+\sqrt{3}) - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{\sqrt{3} - i - 3i - \sqrt{3}}{4} = -i.$$

$\boxed{\text{Par conséquent } \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \frac{3\pi}{2} \text{ et donc } ABC \text{ est rectangle en } A.}$

5.3 Notons z_A, z_B et z_C les affixes de A, B et C respectivement. On remarque que $z_B - z_A = 1 + iz - (1+i)z = 1 - z \neq 0$ car par hypothèse $z \neq 1$. Donc $\omega = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned}
\omega = \frac{z - i - (1+i)z}{1-z} = -i\frac{1+z}{1-z} = -i\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} &= -i\frac{1 - \overline{z} + z - |z|^2}{|1-z|^2} \\
&= -i\frac{1 + 2i\mathrm{Im}(z) - 1}{|1-z|^2} && \text{car } z \in \mathbb{U} \\
&= \frac{2\mathrm{Im}(z)}{|1-z|^2}
\end{aligned}$$

Donc $\omega \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Conclusion } \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv 0 \ [\pi] \text{ et donc } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$

5.4 Notons z_A, z_B et z_C les affixes de A, B et C respectivement. On remarque que $z_B - z_A = iz - i - (1+i)z = -z - i \neq 0$ car par hypothèse $z \neq -i$. Donc $\omega = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned}
\omega = \frac{z - 1 - (1+i)z}{-(z+i)} = \frac{-1 - iz}{-(z+i)} = \frac{iz+1}{z+i} &= \frac{(iz+1)(\overline{z} - i)}{|z+i|^2} \\
&= \frac{i|z|^2 + z + \overline{z} - i}{|z+i|^2} \\
&= \frac{i + 2\mathrm{Re}(z) - i}{|z+i|^2} && \text{car } z \in \mathbb{U} \\
&= \frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z+i|^2}.
\end{aligned}$$

Donc $\omega \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Conclusion } \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv 0 \ [\pi] \text{ et donc } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$

5.5 Soit $f : z \mapsto z - 1 + 3i$. On reconnait alors directement $\boxed{\text{une translation de vecteur d'affixe } -1+3i}$.

5.6 Soit $f : z \mapsto iz + 1 - i$. Ici $a = i \neq 1$. Donc f est une similitude avec un unique point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$f(\omega) = \omega \quad\Leftrightarrow\quad \omega = i\,\omega + 1 - i \quad\Leftrightarrow\quad \omega(1-i) = 1 - i \quad\Leftrightarrow\quad \omega = 1.$$

En posant $\omega = 1$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = i(z - \omega) + \omega = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z-1) + 1.$$

On reconnait alors $\boxed{\text{une rotation de centre } \Omega(1) \text{ et d'angle } \theta = \frac{\pi}{2}.}$

5.7 Soit $f : z \mapsto \frac{1-i}{2} z + \frac{-3+i}{2}$. Puisque $a = \frac{1-i}{2} \neq 1$, f est une similitude avec un unique point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega \quad & \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1-i}{2} \omega + \frac{-3+i}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega \frac{1+i}{2} = \frac{-3+i}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{1+1} = \frac{-3+3i+i+1}{2} = -1+2i. \end{aligned}$$

Posons $\omega = -1+2i$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1-i}{2}(z-\omega) + \omega = \frac{1-i}{2}(z+1-2i) - 1 + 2i = \frac{1-i}{2} z + \frac{1-2i-i-2-2+4i}{2} = \frac{1-i}{2} z + \frac{-3+i}{2} = f(z).$$

Or $\frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} (z-\omega) + \omega \,.$$

On reconnait alors

$\boxed{\text{une similitude de centre } \Omega(-1+2i), \text{ d'angle } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ et de coefficient homothétique } k = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$

5.8 Soit $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z + i + \sqrt{3}$. Comme $a = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \neq 1$, f est une similitude avec un unique point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega \quad & \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \omega + i + \sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \sqrt{3} + i \\ & \Leftrightarrow \quad \omega = 2\frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i} = 2\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}+3i+i-\sqrt{3}}{2} = 2i. \end{aligned}$$

Posons $\omega = 2i$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z-\omega) + \omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z-2i) + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z - i + \sqrt{3} + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z + \sqrt{3} + i = f(z).$$

Or $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} (z-\omega) + \omega \,.$$

On reconnait alors $\boxed{\text{une rotation de centre } \Omega(2i) \text{ et d'angle } \theta = \frac{\pi}{3}.}$

5.9 Soit $f : z \mapsto (1+i) z$. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} z.$$

On reconnait alors

$\boxed{\text{une similitude de centre } O, \text{ d'angle de rotation } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ et de coefficient d'homothétie de } k = \sqrt{2}}.$