Correction de l'interrogation 8 d'entrainement Calcul d'intégrales

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est $\mathscr{C}^1$ sur I noté $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si
   - f est dérivable sur I
   - f' est continue sur I.

   1.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $A \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur I alors la fonction F définie par
   $$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$
   est $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.

   1.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$. Alors,
   $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

   1.4 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})^2$ telles que
   $$\forall t \in [a;b], \qquad f(t) \leqslant g(t).$$
   Alors,
   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   1.5 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $f \in \mathscr{F}([a;b], \mathbb{R})$. On suppose que
   - La fonction f est continue sur $[a;b]$,
   - la fonction f est positive sur $[a;b]$,
   - $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

   Alors pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) = 0$.

   1.6 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors
   $$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   1.7 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,
   $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **Reconnaitre une primitive/Savoir dériver.** Dans chaque cas, l'ensemble des primitives est donné par :

   2.1 $\left\{x \mapsto \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{5x}} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$.

   2.2 $\left\{x \mapsto \frac{1}{3}\arcsin(3\ln(x)) + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$.

   2.3 $\{x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.

   2.4 $\left\{x \mapsto \frac{5^{x^3}}{3\ln(5)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$.

   2.5 $\left\{x \mapsto \frac{-1}{3}\,\mathrm{ch}\left(\frac{3}{x}\right) + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$.

   2.6 $\left\{x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x^2\right|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$.

2.7 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{3} \operatorname{sh}\left(e^{3x}\right) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.8 $\left\{ x \mapsto \frac{3}{2} \left(x \ln(x) - x\right)^2 + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.9 $\left\{ x \mapsto \frac{\pi^{x^2}}{2\ln(\pi)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.10 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{2} e^{\sin(2x+1)} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.11 $\left\{ x \mapsto \arctan\left(\operatorname{ch}(x)\right) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.12 $\left\{ x \mapsto \ln\left(|\sin(x)|\right) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.13 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{4} \ln\left(|\ln(4x)|\right) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.14 $\left\{ x \mapsto \ln\left(\left|2x^2 + 3x + 5\right|\right) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.15 $\left\{ x \mapsto -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2(x)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.16 $\left\{ x \mapsto -\frac{1}{2} \arccos^2(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

Dans chaque cas, la dérivée est :

2.21 $x \mapsto \frac{2+x}{x}$.

2.22 $x \mapsto 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)\, e^{\operatorname{sh}^2(x)}$.

2.23 $x \mapsto \frac{3(\ln(x)+1)x^{3x}}{\sqrt{1-x^{6x}}}$.

2.24 $x \mapsto -\frac{\operatorname{ch}(x)\sin(\operatorname{sh}(x))}{\cos^2(\cos(\operatorname{sh}(x)))}$.

2.25 $x \mapsto \frac{10x\, e^{5x^2}}{3+e^{5x^2}}$.

2.26 $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\arccos^2(x))}}$.

2.27 $x \mapsto \frac{\left(3+10x-15x^2\right) e^{3x}}{(1-5x^2)^2}$.

2.28 $x \mapsto \frac{\cos(x)\ln\left(\operatorname{sh}\left(x^2\right)\right)}{\sin(x)} + \frac{2x\operatorname{ch}\left(x^2\right)\ln(\sin(x))}{\operatorname{sh}(x^2)}$.

2.29 $x \mapsto \frac{2\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

2.30 $x \mapsto \frac{6\operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}^2(2x)}{\cos^2(\operatorname{sh}^3(2x))}$.

2.31 $x \mapsto \left(2x\ln\left(\ln(x)\right) + \frac{x}{\ln(x)}\right)\left(\ln(x)\right)^{x^2}$.

2.32 $x \mapsto \left(3 + 2\tan(3x) + 3\tan^2(3x)\right) e^{2x}$.

2.33 $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+\arctan^2(x)}}$.

2.34 $x \mapsto -\ln(\pi)\sin(x)\pi^{\cos(x)}$.

2.35 $x \mapsto \frac{3\ln^2(x)}{x(1+\ln^6(x))}$.

2.36 $x \mapsto e^x\, e^{e^x}\, e^{e^{e^x}}$.

3. **Dérivation.**

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^{n+1} e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $[0\,;\,1]$. Donc $\boxed{I_{n+1} \text{ existe}}$. Posons pour tout $t \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u(t) = e^t \\ v(t) = t^{n+1}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $t \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v'(t) = (n+1)\,t^n. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t \,dt = \left[t^{n+1} e^t\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (n+1)t^n e^t \,dt = e - 0 - (n+1)\,I_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_{n+1} = e - (n+1)\,I_n.}$$

3.2 La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est continue sur $[-1\,;\,1]$ donc $x \mapsto e^{\arccos(x)}$ est continue sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^{\arccos(x)}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right] \subseteq \left]-1\,;\,1\right[$ et pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}I=\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x &= \left[x\,\mathrm{e}^{\arccos(x)}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)}}{2} - 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On pose pour tout $x\in\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{cases}u(x)=-\sqrt{1-x^2}\\ v(x)=\mathrm{e}^{\arccos(x)}\,.\end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]\subseteq\,]-1\,;\,1[$ et pour tout $x\in[0\,;\,1]$,

$$\begin{cases}u'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ v'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}.\end{cases}$$

Donc par une seconde intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}I &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{2} + \left[-\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{\arccos(x)}\right]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}} - I.\end{aligned}$$

Donc $2I=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$. Conclusion,

$$\boxed{I=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}\,.}$$

3.3 La fonction $a\mapsto\cos(a)\operatorname{ch}(a)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi\,;\,0]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $a\in[-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases}u(a)=\sin(a)\\ v(a)=\operatorname{ch}(a).\end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi\,;\,0]$ et pour tout $a\in[-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases}u'(a)=\cos(a)\\ v'(a)=\operatorname{sh}(a).\end{cases}$$

Ainsi, par une intégration par parties,

$$I=\int_{-\pi}^0 \cos(a)\operatorname{ch}(a)\,\mathrm{d}a = [\sin(a)\operatorname{ch}(a)]_{a=-\pi}^{a=0} - \int_{-\pi}^0 \sin(a)\operatorname{sh}(a)\,\mathrm{d}a = -\int_{-\pi}^0 \sin(a)\operatorname{sh}(a)\,\mathrm{d}a.$$

On pose alors pour tout $a\in[-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases}u(a)=-\cos(a)\\ v(a)=\operatorname{sh}(a).\end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi\,;\,0]$ et pour tout $a\in[-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases}u'(a)=\sin(a)\\ v'(a)=\operatorname{ch}(a).\end{cases}$$

Par une seconde intégration par parties, on trouve

$$I=-\left[-\cos(a)\operatorname{sh}(a)\right]_{a=-\pi}^{a=0} + \int_{-\pi}^0 -\cos(a)\operatorname{ch}(a)\,\mathrm{d}a = -\left(\operatorname{sh}(-\pi)+0\right) - I = \operatorname{sh}(\pi) - I.$$

D'où, $2I = \operatorname{sh}(\pi)$. Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\operatorname{sh}(\pi)}{2}.}$$

3.4 Pour tout $x \geqslant 2$, $x^2 - 1 > 0$. Donc $\sqrt{x^2-1}$ existe et $x + \sqrt{x^2-1} \geqslant x \geqslant 2 > 0$. Donc $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ existe. Ainsi la fonction $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ est bien définie sur $[2\,;\,3] \subseteq [2\,;\,+\infty[$ et est même continue sur $[2\,;\,3]$ car composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons alors pour tout $x \in [2\,;\,3]$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[2\,;\,3]$ car pour tout $x \geqslant 2$, $x^2 - 1 > 0$ et donc $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[2\,;\,3]$. De plus, pour tout $a \in [2\,;\,3]$,

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \end{cases}$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I = \int_2^3 \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \mathrm{d}x &= \left[x \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x \\ &= 3\ln\left(3+\sqrt{8}\right) - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= 3\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \sqrt{8} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 3\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}.}$$

3.5 La fonction $\theta \mapsto \theta \arctan^2(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$ donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$

$$\begin{cases} u(\theta) = \frac{\theta^2}{2} \\ v(\theta) = \arctan^2(\theta). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(\theta) = \theta \\ v'(\theta) = \frac{2\arctan(\theta)}{1+\theta^2} \end{cases}$$

Donc par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \theta \arctan^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \left[\frac{\theta^2}{2}\arctan^2(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1} - \int_0^1 \frac{\theta^2}{2}\frac{2\arctan(\theta)}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\arctan^2(1) - 0 - \int_0^1 \frac{\theta^2+1-1}{1+\theta^2}\arctan(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(\theta) - \frac{\arctan(\theta)}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^1 \frac{\arctan(\theta)}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Posons pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$

$$\begin{cases} u(\theta) = \theta \\ v(\theta) = \arctan(\theta). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(\theta) = 1 \\ v'(\theta) = \frac{1}{1+\theta^2}. \end{cases}$$

Alors par une intégration par parties dans la première intégrale,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi^2}{32} - \left[\theta \arctan(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1} + \int_0^1 \frac{\theta}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta + \left[\frac{\arctan^2(\theta)}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=1} \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|1+\theta^2\right|\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=1} + \frac{\pi^2}{32} \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)-\ln(1)}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi^2 - 4\pi + 8\ln(2)}{16}.}$$

4. **Savoir faire un changement de variable.**

4.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$ et donc $\mathrm{ch}(x) - 1 \geqslant 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et donc admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+$ dont l'une est donnée par le théorème fondamentale de l'analyse par

$$F: \qquad x \mapsto \int_0^x \sqrt{\mathrm{ch}(t)-1}\,\mathrm{d}t.$$

Soient $x \in \mathbb{R}_+$. Alors,

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\mathrm{ch}(t)-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout $t \in [0;x]$ (ou $[x;0]$), $y = \mathrm{e}^t$ i.e. pour tout $y \in [1;\mathrm{e}^x]$ (ou $[\mathrm{e}^x;1]$, $t = \varphi(y) = \ln(y)$. La fonction φ est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1;\mathrm{e}^x]$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Donc,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\frac{y + \frac{1}{y} - 2}{2}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\frac{y^2 - 2y + 1}{2y}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{|y-1|}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{y-1}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \qquad \text{car } y \geqslant 1 \text{ car } x \geqslant 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{y} + \frac{2}{\sqrt{y}}\right]_{y=1}^{y=\mathrm{e}^x} \\
&= \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

NB : on se rend compte a posteriori que l'on pouvait obtenir ce résultat directement par les formules sur les fonctions hyperboliques : on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{ch}(t)-1} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\frac{t}{2}\right) + \mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1} &= \sqrt{\mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) + 1 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1} \\
&= \sqrt{2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \textit{car } t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=x} = 2\sqrt{2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}_+}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto 2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

4.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{sh}^2(x) \geqslant 1 > 0$. Donc f est bien définie et continue et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \qquad x \mapsto \int_0^x \frac{1 + \mathrm{sh}(t)}{1 + \mathrm{sh}^2(t)} \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1 + \mathrm{sh}(t)}{1 + \mathrm{sh}^2(t)} \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout $u \in [0; x]$ (ou $[x; 0]$), $u = \varphi(t) = \mathrm{sh}(t)$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; x]$ et $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{\mathrm{sh}(x)} \frac{1+u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\mathrm{sh}(x)} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\mathrm{sh}(x)} \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= [\arctan(u)]_{u=0}^{u=\mathrm{sh}(x)} + \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|1+u^2\right|\right)\right]_{u=0}^{u=\mathrm{sh}(x)} \\
&= \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \mathrm{sh}^2(x)\right) \\
&= \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}^2(x)\right) \\
&= \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(x)) \qquad \text{car } \mathrm{ch}(x) > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(x)) + C \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

4.3 Pour tout $x \in \left]0\,;\pi\right[$, $\sin(x) > 0$. Donc f est continue sur $\left]0\,;\pi\right[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \qquad x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \left]0\,;\pi\right[$. On a

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{2}; x\right]$ ou $\left[x; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $s = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ qui est bien défini car $\left[\frac{\pi}{2}; x\right] \subseteq \left]0; \pi\right[$ et donc pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}; x\right] \subseteq \left]0; \pi\right[$, on a bien $\frac{t}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathscr{D}_{\tan}$. De façon équivalente, on pose pour tout $s \in \left[1; \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ (ou $\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right); 1\right]$), $t = \varphi(s) = 2\arctan(s)$. La fonction φ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1; \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ et on a $\mathrm{d}t = \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$. De plus, par les formules de l'angle moitié, on sait que $\sin(t) = \frac{2s}{1+s^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1+s^2}{2s} \frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_1^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \\
&= [\ln(|s|)]_{s=1}^{s=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{car } \tan\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \text{ car } x \in \left]0\,;\pi\right[.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur }]0\,;\pi[}$ données par l'ensemble

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0\,;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

4.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\sin^2(x) \geqslant 1 > 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F: \qquad x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout $t \in [0;x]$ (ou $[x;0]$), $a = \tan(t)$ qui est bien défini car $[0;x] \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathscr{D}_{\tan}$. De façon équivalente, on pose pour tout $a \in [0;\tan(x)]$ (ou $[\tan(x);0]$) $t = \varphi(a) = \arctan(a)$. La fonction φ est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\tan(x)]$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(a)\,\mathrm{d}a = \frac{\mathrm{d}a}{1+a^2}$. De plus $\sin^2(t) = 1-\cos^2(t) = 1-\frac{1}{1+\tan^2(t)}$ (formule de la dérivée de la fonction tangente). Donc $\sin^2(t) = 1-\frac{1}{1+a^2} = \frac{a^2}{1+a^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+\frac{a^2}{1+a^2}}\frac{1}{1+a^2}\,\mathrm{d}a \\ &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+2a^2}\,\mathrm{d}a \\ &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}a\right)^2}\,\mathrm{d}a \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}a\right)\right]_{a=0}^{a=\tan(x)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)}{2} + C \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

4.5 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1+x^6 \geqslant 1 > 0$ et $x \neq 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F: \qquad x \mapsto \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^6}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^6}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout $t \in [1;x] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ (ou $[x;1]$), $\theta = \sqrt{1+t^6}$ ou encore pour tout $\theta \in \left[\sqrt{2};\sqrt{1+x^6}\right]$ (ou $\left[\sqrt{1+x^6};\sqrt{2}\right]$) $t = \varphi(\theta) = \left(\theta^2-1\right)^{1/6}$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ donc sur $\left[\sqrt{2};\sqrt{1+x^6}\right]$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\theta}{6(\theta^2-1)^{5/6}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{3(\theta^2-1)^{5/6}}\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta}{\left(\theta^2-1\right)^{1/6}}\frac{\theta}{3\left(\theta^2-1\right)^{5/6}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta^2}{\theta^2-1}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

On commence par « extraire la partie entière de la fraction » en remarquant que $\theta^2 = \theta^2 - 1 + 1$, puis on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1}{\theta^2-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1}{(\theta-1)(\theta+1)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1/2}{\theta-1} - \frac{1/2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\theta + \frac{1}{2}\ln(|\theta-1|) - \frac{1}{2}\ln(|\theta+1|)\right]_{\theta=\sqrt{2}}^{\theta=\sqrt{1+x^6}} \\
&= \frac{1}{3}\left[\theta + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)\right]_{\theta=\sqrt{2}}^{\theta=\sqrt{1+x^6}} \qquad \text{car } \theta+1 \geqslant \theta-1 > 0. \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right) - \underbrace{\frac{1}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}_{=C_1}.
\end{aligned}$$

Simplifions un peu notre résultat. Posons $C_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)^2}{\left(\sqrt{1+x^6}+1\right)\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)}\right) - C_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)^2}{1+x^6-1}\right) - C_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)^2}{x^6}\right) - C_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^3}\right) - C_1
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}_+^*}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^3}\right) + C \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. **Manipulation du petit o.**

5.1 Soit $A(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3+4x^2\right) + x^3 o\left(\cos(x) + \frac{1}{x}\right)$. Puisque $x^3 \underset{x\to 0}{\ll} 4x^2$, on a $o\left(x^3+4x^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(4x^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$. De plus $\cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ tandis que $\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$ donc $\cos(x) \underset{x\to 0}{\ll} \frac{1}{x}$ et $o\left(\cos(x)+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. Par suite, $x^3 o\left(\cos(x)+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$. Ainsi,

$$A(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{A(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).}$$

5.2 Soit $B(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(3x + o\left(\ln(x)\right)\right) + o\left(\mathrm{e}^x\right) + 7x^3$. On a $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} 3x$ et donc a fortiori, $o\left(\ln(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} 3x$. Ainsi, $o\left(3x + o\left(\ln(x)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(3x\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x\right)$. De plus $x \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$ et donc $o(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$ i.e. $o(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right)$. De même $7x^3 \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right)$. Donc

$$B(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right) + o\left(\mathrm{e}^x\right) + o\left(\mathrm{e}^x\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{B(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x}\right).}$$

5.3 Soit $C(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 - 2o\left(\ln(x)\right) + \mathrm{e}^{2x}\right) + o\left(\sqrt{x}\right)$. On observe que $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, $x^3 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Par conséquent, $x^3 \underset{x\to 0}{\ll} \mathrm{e}^{2x} \underset{x\to 0}{\ll} \ln(x)$. Ainsi,

$$x^3 - 5o\left(\ln(x)\right) + \mathrm{e}^{2x} \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right) - 2o\left(\ln(x)\right) + o\left(\ln(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right)$$

et non 0 *!!!!* Ainsi,

$$o\left(x^3 - 2o\left(\ln(x)\right) + \mathrm{e}^{2x}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(o\left(\ln(x)\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right).$$

Enfin, $\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\ll} \ln(x)$ donc

$$C(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right) + o\left(\ln(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{C(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right).}$$

5.4 Soit $D(x) \underset{x\to+\infty}{=} \cos(x) - 8o\left(1\right)o\left(\sqrt{x}\right) + o\left(\ln\left(x + \mathrm{e}^{x}\right)\right)$. On observe que pour tout $x > 0$,

$$\ln\left(x + \mathrm{e}^{x}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) + \ln\left(1 + x\,\mathrm{e}^{-x}\right) = x + \ln\left(1 + x\,\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Or par croissance comparée, $x\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $1 + x\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, $\ln\left(1 + x\,\mathrm{e}^{-x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc notamment $\ln\left(1 + x\,\mathrm{e}^{-x}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} x$. Ainsi,

$$o\left(\ln\left(x + \mathrm{e}^{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x + \ln\left(1 + x\,\mathrm{e}^{-x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(x).$$

D'autre part, $\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x$ donc

$$D(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x\right) + o\left(\sqrt{x}\right) + o\left(x\right).$$

Puisque $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x$, on conclut que

$$\boxed{D(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x\right).}$$

5.5 Soit $E(x) \underset{x\to 1}{=} o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + o\left(\mathrm{e}^{x}\right) + 5o\left(\frac{1}{\sin(x-1)}\right) + o\left(x-1\right)$. Posons $h = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$E(x) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right) + o\left(\mathrm{e}^{h+1}\right) + 5o\left(\frac{1}{\sin\left(h\right)}\right) + o\left(h\right).$$

On sait que $\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\frac{\frac{1}{\sin(h)}}{\frac{1}{h^2}} = \frac{h}{\frac{\sin(h)}{h}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{0}{1} = 0$ autrement dit $\frac{1}{\sin(h)} \underset{h\to 0}{\ll} \frac{1}{h^2}$. D'où,

$$o\left(\frac{1}{h^2}\right) + 5o\left(\frac{1}{\sin\left(h\right)}\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

De plus, $\mathrm{e}^{h+1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ et $h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $h \underset{h\to 0}{\ll} \mathrm{e}^{h+1} \underset{h\to 0}{\ll} \frac{1}{h^2}$. D'où,

$$E(x) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right) + o\left(\frac{1}{h^2}\right) + o\left(\frac{1}{h^2}\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

On n'oublie pas de revenir à la variable initiale :

$$\boxed{E(x) \underset{x\to 1}{=} o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).}$$