



Correction Automne 01 Trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. On sait que

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1.$$

Donc par définition de α , on a

$$\cos(2\alpha) = 2 \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 - 1 = 2 \times \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} - 1 = \frac{8 - 4\sqrt{3} - 8}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

Conclusion,

$$\cos(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Par la question précédente, on remarque que $\cos(2\alpha) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2\alpha &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad 2\alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha &= \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad \text{OU} \quad \alpha = -\frac{5\pi}{12} + k\pi. \end{aligned}$$

Or $\alpha \in [0; \pi]$. Nécessairement,

$$\alpha = \frac{5\pi}{12}.$$

3. On sait que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} \\ &= \frac{16 - 8 + 4\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

Par ces calculs, on remarque que $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$. De la même façon, on a $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$. Ainsi,

$$\sin^2(\alpha) = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16}.$$

Donc $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ou $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Cependant, $\alpha = \frac{5\pi}{12} \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Donc $\sin(\alpha) \geq 0$. Ainsi, nécessairement,

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$



4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par les questions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E) : & (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos(x) + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin(x) \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin(\alpha) \cos(x) + \cos(\alpha) \sin(x) \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin(x + \alpha) \geq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \geq x + \alpha \geq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \geq x + \frac{5\pi}{12} \geq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \geq x \geq -\frac{3\pi}{12} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right].$$