Correction Automne 02
Equation complexe et analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Lorsque $n = 0$, alors l'ensemble solution est $\mathbb{C}$. Supposons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On note que z est une solution de (E) si et seulement si $z+1$ et $z-1$ sont deux racines n-ièmes du même complexe. Alors

$$\begin{array}{lll}
(E) & \Leftrightarrow & \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z+1 = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-1) \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -\left(1+\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \\
& \Leftrightarrow & (k=0, \quad \text{ET} \quad 0=-2 \text{ impossible }) \quad \text{OU} \quad \exists k \in [\![1; n-1]\!], \quad z = -\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}.
\end{array}$$

Par la factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{array}{lll}
(E) & \Leftrightarrow & \exists k \in [\![1; n-1]\!], \quad z = -\dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} \dfrac{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in [\![1; n-1]\!], \quad z = -\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}
\end{array}$$

Conclusion, si $n=0$ l'ensemble solution est $\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathbb{C}}$ et si $n \neq 0$, alors l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_n = \left\{ -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \;\middle|\; k \in [\![1\,;\,n-1]\!] \right\}.}$$

Solution de l'exercice 2 On observe que pour tout $x > 0$,

$$\frac{3x}{4\sqrt{3+x^3}} = \frac{3x}{4x^{3/2}\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}} = \frac{3}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{4\sqrt{3+x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x \underset{x\to+\infty}{\ll} 4\sqrt{3+x^3}.$$

De plus, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{4\sqrt{3+x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{\left(\frac{x}{4}\right)^{3/2}} \frac{1}{4^{5/2}\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}} = 0.$$

Donc $3x \underset{x\to+\infty}{\ll} 4\sqrt{3+x^3} \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$. Conclusion,

$$\boxed{o\left(3x + 4\sqrt{3+x^3} + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right).}$$