EXERCICE AUTOMNE 03 :

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{1\le k\le j\le n}\frac{1}{j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}1$$ oui

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times j$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j} = n}$$

Bien.

Exercice 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^1 1\times \arctan(x)\,dx$$

Posons $\forall t \in [0;1]$, on a : $u(t) = t$ et $v(t) = \arctan(t)$

De plus, u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ oui

Or, $\forall t \in [0;1]$, on a : $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Ce qui nous donne : par intégration par parties

$$I = \left[t\arctan t\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 t\times\frac{1}{1+t^2}\,dt$$ oui

$$= 1\arctan(1) - 0\times\arctan(0) + \frac{1}{2}\ln(1+0^2) - \frac{1}{2}\ln(1+1^2)$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)}$$

oui bien!

à détailler en écrivant d'abord le [...]