Exercices d'entrainement.

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{j}$$ oui

D'où $$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j} \checkmark = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} 1$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times j \checkmark$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 1 = n \checkmark$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = n}$$ Bien.

Exercice 2:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$I = \int_0^1 \arctan(x)\, dx$$

Procédons par Intégration par partie — u et v sont C^1 sur $[0;1]$ et

* Soit $\forall x \in [0;1]$ $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \arctan(x) \text{ et } v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

Donc $I = \int_0^1 \arctan(x) \times 1\, dx = [x \arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$ ✓

w est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in \ldots$

Posons $\forall x \in [0,1]$ $w(x) = 1+x^2$ et $w'(x) = 2x$ Donc $\frac{1}{2} w'(x) = x$ ✓

Or, $w(0) = 0^2 + 1 = 1$ et $w(1) = 1^2 + 1 = 2$

Donc: $I = [x \arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_1^2 \frac{w'(x)}{w(x)} \times \frac{1}{2}\, dx$

$= [x \arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{w'(x)}{w(x)}\, dx$

$= [x \arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2} [\ln(|w(x)|)]_{x=1}^{x=2}$ oui

Donc $I = \arctan(1) - \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1))$

$= \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln(2)$ ✓

$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$

Conclusion:

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$ Bien.