Correction Automne 03
Calcul algébrique et Intégration par parties

Solution de l'exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'on ne sait pas calculer la somme des inverses, l'astuce est d'échanger l'ordre de sommation : sommer d'abord sur j puis sommer sur k. D'après le cours, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j}.$$

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, le terme $\frac{1}{j}$ ne dépend pas de la variable de sommation k et donc :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} 1 \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times j = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = n.}$$

Solution de l'exercice 2 La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[0;1]$ donc I existe. Posons

$$\forall x \in [0;1]\,, \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \arctan(x) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\forall x \in [0;1]\,, \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= [x \arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x \times \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \arctan(1) - 0 - \left[\frac{1}{2} \ln\left(\left|1+x^2\right|\right)\right]_{x=0}^{x=1} && \textit{n'oubliez pas les valeurs absolues} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2) - 0}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.}$$