Exercice 04 : Fonctions usuelles

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, (E) est définie ~~sur~~ en $x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq 2x \leq 1 \end{cases}$ ✓

$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ✓

Ainsi, $\boxed{(E) \text{ est définie sur } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]}$ ✓

2) 0 est un minorant simple de la fonction arccos ~~sur~~.

3) La fonction arcsin est impaire et arccos est pair

Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ donc* si $x < 0$, on a : $\arccos(x) = -\arcsin(2x)$ par dans ce qui est impossible. parle de signe plutôt.

Ainsi, $\boxed{\text{si } x \text{ est solution de } (E), \text{ alors } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]}$

4) $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a :

x	0		$\frac{1}{2}$
$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$-$	
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{3}$

✓

x	0		$\frac{1}{2}$
$\arcsin'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$+$	
$\arcsin 2x$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

✓

La fonction arccos ~~(x)~~ est continue et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ à valeurs dans $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

La fonction arcsin ~~(2x)~~ est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

pas clair du tout...

Donc (E) admet une solution dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

5) Soit $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

$\arccos(x) = \arcsin(2x)$

NON !!! $\Rightarrow \sin \arccos(x) = \sin \arcsin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x$ ✓ & redémontrer systématiquement

$\Leftrightarrow 1-x^2 = 4x^2$ car $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ et $2x \geq 0$ OK

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ impossible car $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ ✓

$= \frac{\sqrt{5}}{5}$

Conclusion, $\arccos(x) = \arcsin(2x) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ Bien !

Calcul matriciel

Calculons AB

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ -11 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -21 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ -11 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -21 \end{pmatrix}$$ ✓ A encadrer

Calculons BA :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 20 & 3 \\ -4 & -21 & -10 \\ 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 3 \\ -4 & -21 & -10 \\ 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$ ✓ A encadrer

$AB \neq BA$ car leurs coefficients ne sont pas égaux à encadrer aussi