Correction Automne 04
Fonctions usuelles et Calcul matriciel

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E) \text{ est définie en } x \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2x \leqslant 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

Conclusion, l'équation (E) est bien définie sur

$$\boxed{I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].}$$

2. On sait que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\pi \geqslant \arccos(x) \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{0 \text{ est un minorant et même le minimum de la fonction } \arccos.}$$

3. Soit $x \in I$ une solution de (E). Donc $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et donc $x \leqslant \frac{1}{2}$. De plus, on a

$$\arcsin(2x) = \arccos(x)$$

et par la question précédente, $\arccos(x) \geqslant 0$. Donc

$$\arcsin(2x) \geqslant 0 = \arcsin(0) \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geqslant 0 \qquad \text{par la croissance de la fonction arcsin.}$$

Ainsi, $x \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{x \text{ solution de } (E) \ \Leftrightarrow \ x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].}$$

4. Posons $f : x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x)$. La fonction f est définie et même continue sur I. De plus,

$$f(0) = \arccos(0) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0.$$

D'autre part,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0.$$

Donc $0 \in \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f(0)\right]$ et f est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Conclusion, par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\text{il existe une solution de } (E) \text{ dans } \left[0; \frac{1}{2}\right].}$$

5. *Analyse.* Soit $x \in I$ une solution de (E). Par la question 3, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. DE plus, on a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned}x \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \arccos(x) = \arcsin(2x) \\ &\Rightarrow \quad \cos(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(2x)) \\ &\Rightarrow \quad x = \cos(\arcsin(2x)).\end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. Donc $\cos(u) = \pm\sqrt{1-\sin^2(u)}$. En particulier,

$$\cos(\arcsin(2x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(2x))} = \sqrt{1-4x^2} \quad \text{OU} \quad \cos(\arcsin(2x)) = -\sqrt{1-4x^2}$$

Or $\arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos(\arcsin(2x)) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\cos(\arcsin(2x)) = \sqrt{1-4x^2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Rightarrow \quad x = \sqrt{1-4x^2} \\
&\Rightarrow \quad x^2 = 1-4x^2 \\
&\Rightarrow \quad 5x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{5} \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{OU} \quad x = -\frac{\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

Or on a vu que $x \geqslant 0$. Donc

$$(E) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Synthèse. Nous avons un seul candidat pour être solution de (E) or on a vu que (E) possède au moins une solution. Conclusion, (E) possède une et une seule solution :

$$\boxed{x \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5}.}$$

Solution de l'exercice 2 On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ -11 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -21 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 3 \\ -4 & -21 & -10 \\ 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -11 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -21 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 3 \\ -4 & -21 & -10 \\ 1 & -7 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB \neq BA.}$$