Exercice automne 05

1) On a $M(z)$, $N(1)$ et $P(1+z^2)$

On a les équivalences suivantes :

M, N, P alignés $\Leftrightarrow$ $\vec{MN}$ et $\vec{NP}$ colinéaires oui

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_N - z_M}{z_P - z_N}\right) = 0 \ [\pi]$ est-ce bien non nul ?

$\Leftrightarrow \frac{z_N - z_M}{z_P - z_N} \in \mathbb{R}$ ✓

$\Leftrightarrow \frac{1-z}{z^2} \in \mathbb{R}$ ✓

$\frac{1-z}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1-z}{z^2} = \overline{\left(\frac{1-z}{z^2}\right)}$ ✓

$\Leftrightarrow \frac{1-z}{z^2} = \frac{1-\bar{z}}{\bar{z}^2}$ ✓

$\Leftrightarrow (1-z)\bar{z}^2 = (1-\bar{z})z^2$ CAR ...

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 - z\bar{z}^2 = z^2 - \bar{z}z^2$ ✓

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 - z\bar{z}^2 - z^2 + \bar{z}z^2 = 0$ ✓

$\Leftrightarrow z\bar{z}(z-\bar{z}) + (\bar{z}^2 - z^2) = 0$ ✓

$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(|z|^2 - \bar{z} - z) = 0$ oui !

- Si $z = \bar{z}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?!
- Si $z \neq \bar{z}$, on pose $z = a + ib$ ✓ on a :

M, N, P alignés $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a = 0$ ✓

$\Leftrightarrow (a-1)^2 - 1 + b^2 = 0$ oui

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1$. ✓ Bien

Conclusion, l'ensemble solution est le cercle de centre $(1;0)$ et de rayon 1. union ...

Dessin ?

2) Soit $I = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

Calculons I en posant $t = \sqrt{x}$ ✓

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur le segment $[1;2]$ donc I existe oui !

Posons $\forall x \in [1;2]$, $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = tx \end{cases}$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ \underline{v'(x)} = t \end{cases}$

Non
si $t = \sqrt{x}$
t dépend de x.

Donc par intégration par parties :

$$I = [\ln(x)\,t\,x]_1^2 - \int_1^2 \ln(x) \times t \, dx$$

$$= 2t\ln(2) - 0 - \Big[t(x\ln(x) - x)\Big]_1^2$$

$$= 2t\ln(2) - \big(t(2\ln(2) - 2) + t\big)$$

$$= 2t\ln(2) - 2t\ln(2) + 2t - t$$

$$= 2t\ln(2) - 2t\ln(2) + t$$

$$= t = \sqrt{x}.$$

$\boxed{\text{Conclusion, } I = \sqrt{x}}$.

I est un nombre indépendant de la variable d'intégration.
A revoir.