Exercice Automne 05.

Exercice 1 :

M, N, P alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires ✓

d'où $\overset{\Leftrightarrow}{}$ $\arg\left(\dfrac{z_N - z_M}{z_P - z_N}\right) \equiv 0[\pi]$ que si $N \neq P$

~~donc~~ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_N - z_M}{z_P - z_N} \in \mathbb{R}$

On a $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1 - z}{z^2} = \overline{\dfrac{1-z}{z^2}}$ Qui est z ?

d'où on cherche z dans $\mathbb{C}$ tel que :

$$\frac{1-z}{z^2} = \frac{1-\bar{z}}{\bar{z}^2} \quad \text{avec } z \neq 0 \ ✓$$

Si $z = \bar{z}$, alors $z \in \mathbb{R}^*$ et l'équation est vérifiée. OK

or si $z = 0$, on a $M(0)$, $N(1)$ et $P(1)$ qui sont alignés. ✓

$\boxed{\text{Donc la droite d'équation } y = 0 \text{ est solution.}}$ ✓

De plus, on a ...$\Leftrightarrow$ $\bar{z}^2(1-z) = (1-\bar{z})z^2$

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 - z\bar{z}^2 = z^2 - \bar{z}z^2$ ✓

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 - z^2 = z\bar{z}^2 - \bar{z}z^2$ ✓

$\Leftrightarrow (\bar{z}-z)(\bar{z}+z) = z\bar{z}(\bar{z}-z)$ ✓

$\Leftrightarrow (\bar{z}-z)[\bar{z}+z-z\bar{z}] = 0$ ✓

$\Downarrow$

$=0$

$\mathbb{R}$

mal écrit

On cherche donc $\bar{z}+z-z\bar{z}=0$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-\bar{z}-z=0$ v

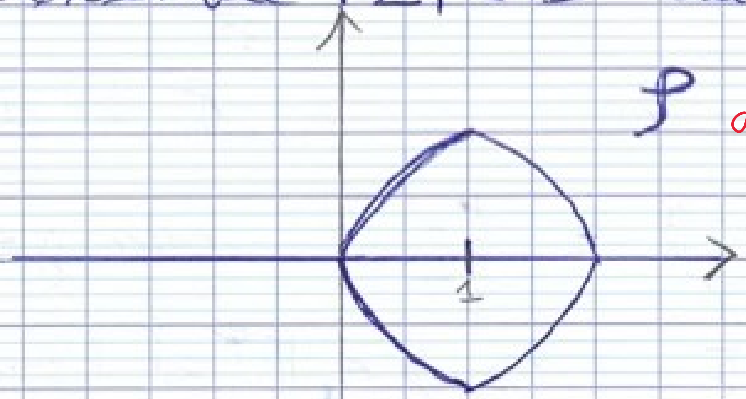
$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)-1=0$ v

$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)=1$ v

$\Leftrightarrow \boxed{|z-1|=1}$ bien.

On obtient le cercle de centre $(0;1)$ et de rayon 1. oui

S est bien l'union de l'ensemble $\mathbb{R}$ et de l'ensemble $|Z|=1$ avec $z-1=Z$ ok



P oui! Bien.

Exercice 2 :

D'après la proposition II.5 du cours on a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

On pose $x=\varphi(t)$ et $x' : \frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$

d'où $dx=\varphi'(t)\,dt$

On pose $f(x)=\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et ~~on a~~ $x=t^2=\varphi(t)$ ok

d'où $\varphi'(t)=2t$ v

On applique la formule du cours :

$$I=\int_{\varphi(1)=1}^{\varphi(\sqrt{2})=2} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln t^2}{\sqrt{t^2}}\,2t\,dt$$ ok

$$=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\ln t}{t}\,2t\,dt$$ v

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 4 \ln t \, dt$$

$$= 4 \int_1^{\sqrt{2}} \ln t \, dt$$

$$= 4 \left[t \ln t - t \right]_{t=1}^{t=\sqrt{2}}$$

$$= 4 \left[\sqrt{2} \ln \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \right]$$

$$= 4 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2 - \sqrt{2} + 1 \right]$$

$$\boxed{I = 4 \left[\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1 \right]}$$

Bien.