Correction Automne 05
Géométrie complexe et changement de variable

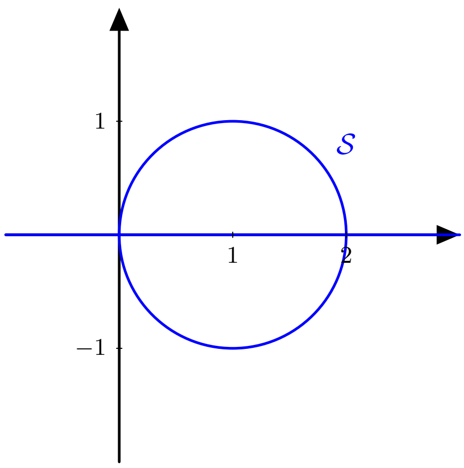
Solution de l'exercice 1 Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 1$ alors M et P sont confondus et donc M, N et P sont alignés. Supposons maintenant que $z \neq 1$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M,\ N,\ P \text{ sont alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{NP} \text{ et } \overrightarrow{MN} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \quad \arg\left(z_P - z_N\right) - \arg\left(z_M - z_N\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1 + z^2 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{z - 1} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{z - 1} = \overline{\left(\frac{z^2}{z - 1}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{z - 1} = \frac{\overline{z}^2}{\overline{z} - 1} \\
&\Leftrightarrow \quad z^2\left(\overline{z} - 1\right) = \overline{z}^2\left(z - 1\right) \qquad \text{car } z \neq 1 \text{ et donc } \overline{z} \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad z\left|z\right|^2 - z^2 = \left|z\right|^2\overline{z} - \overline{z}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|z\right|^2\left(z - \overline{z}\right) = z^2 - \overline{z}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|z\right|^2 2i\mathrm{Im}(z) = \left(z - \overline{z}\right)\left(z + \overline{z}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left|z\right|^2 2i\mathrm{Im}(z) = 2i\mathrm{Im}(z) \times 2\mathrm{Re}(z) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \ \text{ OU } \ \left|z\right|^2 = 2\mathrm{Re}(z) \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \ \text{ OU } \ \left|z\right|^2 - 2\mathrm{Re}(z) = 0.
\end{aligned}$$

On observe que la solution $z = 1$ est bien contenue dans $\mathbb{R}$. D'autre part, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Alors,

$$\left|z\right|^2 - 2\mathrm{Re}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)^2 - 1 + b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)^2 + b^2 = 1.$$

Conclusion, l'ensemble solution est l'union de la droite des abscisses et du cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $\sqrt{1} = 1$.



Vérification, si $z = 1 + i$ par exemple, nous sommes bien sur le cercle en question sur la droite $x = 1$. Donc M et N sont sur la droite $x = 1$. Vérifions que P aussi. Dans ce cas, l'affixe de P vaut $1 + z^2 = 1 + (1 + i)^2 = 1 + 1 + 2i - 1 = 1 + 2i$. Donc M, N et P sont bien alignés !

Solution de l'exercice 2 La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc notamment sur le segment $[1; 2]$. Posons pour tout $x \in [1; 2]$, $t = \varphi(x) = \sqrt{x}$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1; 2]$. De plus, $x = t^2$ et donc $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. D'où,

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln\left(t^2\right)}{t} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln(t)\,\mathrm{d}t = 4\left[t\ln(t) - t\right]_{t=1}^{t=\sqrt{2}} \qquad \textit{cf exemple 12 du cours.}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 4\left(\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} - 0 + 1\right) = 2\sqrt{2}\ln(2) - 4\sqrt{2} + 4.}$$