

Exercice n° 1.

1) Soit $f: x \rightarrow \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et D le domaine de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{x-1} \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{x-1} \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Tableau de signe de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^3		$- \phi +$		$+$
$x-1$	$-$	ϕ	$+$	$+$
quotient	$+$	ϕ	$-$	$+$

oui!

Le quotient est positif sur $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$

Donc $D =]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$ à encacher

2) f est la fonction composée de $h: x \rightarrow \sqrt{x}$ et $u: x \rightarrow \frac{x^3}{x-1}$.

- u est dérivable sur son domaine de définition, comme quotient de polynômes, donc u dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après le tableau de signe de la question n° 1, on a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Par composition, f est dérivable sur D avec $D =]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$ à encacher

$$I \subset D'$$

$$3) \forall x \in I,$$

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{x-1} \right)' \times \frac{1}{2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \quad \downarrow \text{rapide!}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \quad \checkmark$$

A simplifier

4) Tableau de variation de f :

*

x

$\frac{3}{2}$

$+\infty$

Signe de $f'(x)$

+

variation de f

$+\infty$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$* f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{3}{2}-1}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{\frac{1}{2}}} \quad \checkmark$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - \frac{1}{x}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{oui}$$

f est continue car dérivable et d'après son tableau de variation, elle est strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ et s'annule une seule fois en $x = \frac{3}{2}$.

Donc f définit une bijection de $]\frac{3}{2}; +\infty[$ dans $[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ ($f(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$).

5) De plus, $\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$, $f(x) \neq 0$.

f définit une bijection sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$ d'où

f^{-1} est dérivable sur $[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ et f^{-1} est la réduction des hypothèses.

$\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$