Correction Automne 06
Fonctions réelles

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{x-1} \geqslant 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x^3 \leqslant 0 \\ x-1 \leqslant 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x > 1 \ \text{ OU } \ x \leqslant 0 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \left]-\infty; 0\right] \cup \left]1; +\infty\right[.}$$

2. Puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, on adapte notre ensemble. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f \text{ est dérivable en } x \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \frac{x^3}{x-1} > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \ \text{ OU } \ x < 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}' = \left]-\infty; 0\right[\cup \left]1; +\infty\right[.}$$

3. On note que $I \subseteq D'$. Donc f est bien dérivable sur I. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \qquad f'(x) &= \left(\frac{x^3}{x-1}\right)' \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x^3}} \qquad \text{car } x-1 > 0 \text{ et } x^3 > 0 \\ &= x^2 \frac{3x-3-x}{(x-1)^2} \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x^3}} \\ &= \frac{\sqrt{x}\,(2x-3)}{2\,(x-1)^{3/2}} \qquad \text{car } x-1 > 0 \text{ et } x^3 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{x}\,(2x-3)}{2\,(x-1)^{3/2}}.}$$

4. Posons $J = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Soit $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Alors, $x > \frac{3}{2}$ et donc $2x - 3 > 0$. De plus, $x - 1 > 0$ et $x > 0$. Donc par la question précédente,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}\,(2x-3)}{2\,(x-1)^{3/2}} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et par continuité f est strictement croissante sur J. De plus, f est continue sur J car dérivable sur cet intervalle car $J \subseteq I$. Donc

- f est strictement croissante sur J,

- f est continue sur J.

Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de J dans $K = f(J)$. De plus $K = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$. Or

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } J \text{ dans } K = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[.}$$

5. On a vu que f est dérivable sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et pour tout $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$. Donc,
   - f est strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$,
   - f est dérivable sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$,
   - pour tout $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) \neq 0$.

   Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, on en déduit que f^{-1} est dérivable sur

$$f\left(\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\right) = \left]f\left(\frac{3}{2}\right); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$

   Donc par ce qui précède,

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } L = \left]\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[.}$$