Exercice n° 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(\bar{E})$: $\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) \geqslant -1$

$\iff \cos^2(x) - \sin(2x) - \sin^2(x) \geqslant -1$ ✓

$\iff \dfrac{1+\cos(2x) - 2\sin(2x) - 1 + \cos(2x)}{2} \geqslant -1$ oui !

$\iff \cos(2x) - \sin(2x) \geqslant -1$ ✓

$\iff \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \cos(2x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Bien.

$\iff \sin(\pi/4)\cos(2x) - \cos(\pi/4)\sin(2x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \sin(\pi/4 - 2x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \geqslant \pi/4 - 2x \geqslant -\pi/4 + 2k\pi$. ✓

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\pi/2 + k\pi \cancel{\geqslant} x \cancel{\geqslant} \pi/4 + k\pi$. ⚠

Conclusion : $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi/2 + k\pi ; \pi/4 + k\pi]$. Bien !

Exercice n° 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(14x^7)}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7\ln(x) + \ln(14)}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7\frac{\ln(x)}{x}}{x^2} + \dfrac{\ln(14)}{x^3}$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. oui

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7\frac{\ln(x)}{x}}{x^2} = 0$ ✓

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(14)}{x^3} = 0$ ✓

donc $x^3 \underset{x\to+\infty}{\gg} \ln(14x^7)$ oui

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$ donc $x^3 \underset{x\to+\infty}{\gg} 4x$ oui

<u>Conclusion</u> : $o\left(x^3+\ln(14x^7)+4x\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ Bien

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ast \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{4x}{x^3}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{4}{x^2}\right) = +\infty$

donc $x^3 \underset{x\to 0}{\ll} 4x$ ✓

$\ast \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(14x^7)}{x^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{7\ln(x)+\ln(14)}{x^3} = +\infty$ ✓

donc $7\ln(x)+\ln(14) \underset{x\to 0}{\gg} x^3$

$\ast \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{7\ln(x)+\ln(14)}{4x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x\left(7\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln(14)}{x}\right)}{4x}$ ✓

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{7\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln(14)}{x}}{4}$

direct

$= +\infty$ par ~~croissance comparée~~ Non.

donc $7\ln(x)+\ln(14) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\gg} 4x$

<u>Conclusion</u> : $o\left(x^3+\ln(14x^7)+4x\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} o\left(7\ln(x)+\ln(14)\right)$ Oui

$\ln(x) \underset{x\to 0}{\gg} \ln(14)$

$\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} o\left(\ln(14x^7)\right)$

$\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} o\left(\ln(x)\right)$.