Correction Automne 07
Trigonométrie et analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et que $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) \geqslant -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) - \sin(2x) \geqslant -1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\pi + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{4} + k\pi\right].}$$

Solution de l'exercice 2 Pour tout $x > 0$, on a

$$x^3 + \ln\left(14x^7\right) + 4x = x^3 + 4x + 7\ln(x) + \ln(14).$$

Or

$$\ln(14) \underset{x\to+\infty}{\ll} 7\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} 4x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^3.$$

Ou encore

$$\ln\left(14x^7\right) + 4x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^3\right).$$

Par conséquent,

$$\boxed{o\left(x^3 + \ln\left(14x^7\right) + 4x\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^3\right).}$$

En 0, on a cependant $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 7\ln(x) = -\infty$. Donc

$$x^3 \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\ll} 4x \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\ll} \ln(14) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\ll} 7\ln(x).$$

Notez que l'ordre n'est pas totalement inversé. Revenez à chaque fois à la définition si besoin. Ainsi,

$$x^3 + 4x + \ln(14) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{=} o(7\ln(x)).$$

D'où

$$o\left(x^3 + \ln\left(14x^7\right) + 4x\right) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{=} o(7\ln(x)).$$

Enfin, $o(7\ln(x)) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{=} o(\ln(x))$. Conclusion,

$$\boxed{o\left(x^3 + \ln\left(14x^7\right) + 4x\right) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{=} o(\ln(x)).}$$