Exercices - Automne 08

Exercice n°1 :

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z^{14} + 4 = (3+i)z^7$

$\iff z^{14} - (3+i)z^7 + 4 = 0.$

oui

Posons $w = z^7$ donc $w^2 = z^{14}$. On a alors,

$(E) : w^2 - (3+i)w + 4 = 0.$

L'équation du second degrés (E) admet un discriminant Δ tel que $\Delta = (3+i)^2 - 4 \times 4 = -8+6i$

$\Delta = -8+6i.$

Soit $\delta' = x+iy$ avec x et y deux réels.

On a les équivalences suivantes :

$(\delta')^2 = -8+6i \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = -8+6i \\ |\delta|^2 = |-8+6i| = 10. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ 2xy = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ OU $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ car $xy \geq 0$.

oui

$\iff \delta' = 1+3i$ OU $\delta = -1-3i.$

Par conséquent pour $\delta \in \mathbb{C}$,

$\delta^2 = \Delta \iff \delta = 1+3i$ OU $\delta = -1-3i.$

Fixons désormais $\delta = 1+3i$. Les deux solutions de (E) sont données par :

$w_1 = \dfrac{+3+i+1+3i}{2} = \cancel{-1+i}$ et $w_2 = \dfrac{+3+i-1-3i}{2} = \cancel{-2-2i}$

Donc $w_1 = -1+i$ et $w_2 = -2-2i$

Or z est solution de (E) si et seulement si $w = z^7$ est solution de $z^{14} - (3+i)z^7 + 4 = 0$. v

Donc les solution de $z^{14} + 4 = (3+i)z^7$ sont les racines septièmes de w_1 et w_2. oui

On a $w_1 = -1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ v

Donc les racines 7ièmes de w_1 sont,

$$z_1 = \sqrt[7]{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$$ oui !

$$\left\{ \boxed{z_1 = 2^{\frac{7}{2}} e^{i\left(\frac{3\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\}$$

De même pour w_2, on a $w_2 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ oui

Donc les racines 7ièmes de w_2 sont,

$$z_2 = \sqrt[7]{2\sqrt{2}}\, e^{-i\left(\frac{3\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \quad k \in [\![0;6]\!].$$

$$\left\{ \boxed{z_2 = 2^{\frac{21}{2}} e^{-i\left(\frac{3\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}} \;\middle|\; \right\}$$ Cohérent

Exercice n°2 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx$

La fonction $x \longmapsto \arcsin(x)$ est continue sur ... ?

et donc sur le segment $[0; \frac{1}{2}]$ v Donc I existe. v

Posons $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$, $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \arcsin x \end{cases}$ v ⚠ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ v

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \frac{1}{2}]$

et par intégration par parties, il vient,

$$I = [x\arcsin(x)]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ v

$$= [x\arcsin(x)]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{-2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ v

$$= [x\arcsin(x)]_{x=0}^{x=1/2} - \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{+} - 1$$ oui !

$$\boxed{I = \frac{\pi}{12} + \frac{-2+\sqrt{3}}{2}}$$ Bien !