



Correction Automne 08

Equation complexe et IPP

Solution de l'exercice 1 Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\omega = z^7$. On a alors les équivalences suivantes :

$$(E) : z^{14} + 4 = (3 + i)z^7 \Leftrightarrow \omega^2 + 4 = (3 + i)\omega \Leftrightarrow \omega^2 - (3 + i)\omega + 4 = 0.$$

Soit Δ le discriminant du polynôme $\omega^2 - (3 + i)\omega + 4$. On a

$$\Delta = (3 + i)^2 - 16 = 9 + 6i - 1 - 16 = -8 + 6i \neq 0.$$

Le complexe Δ étant non nul, possède deux racines complexes distinctes. Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = \Delta \\ |x + iy|^2 = |\Delta| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad \text{par unicité de la forme algébrique d'un complexe} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = -8 + 10 & (L_1 + L_3) \\ xy = 3 \\ 2y^2 = 10 + 8 & (L_3 - L_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 3 \\ \text{OU} \\ x = -1 \text{ et } y = -3 \end{cases} \quad \text{car } xy \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 + 3i \\ \text{OU} \\ \delta = -1 - 3i \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les racines du polynôme $\omega^2 - (3 + i)\omega + 4$ sont

$$\omega_1 = \frac{3 + i + 1 + 3i}{2} = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{3 + i - 1 - 3i}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2 + 2i \\ \text{OU} \\ \omega = 1 - i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z^7 = 2 + 2i \\ \text{OU} \\ z^7 = 1 - i \end{cases} \end{aligned}$$



- Déterminons les racines 7^{ièmes} de $2 + 2i$. On a $2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z^7 = 2 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \sqrt[7]{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}} = 8^{\frac{1}{14}} e^{i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}}.$$

- Déterminons les racines 7^{ièmes} de $1 - i$. On a $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z^7 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \sqrt[7]{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}} = 2^{\frac{1}{14}} e^{-i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}}.$$

De ces études, on en déduit que

$$z^{14} + 4 = (3 + i) z^7 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 8^{\frac{1}{14}} e^{i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}}, 2^{\frac{1}{14}} e^{-i\frac{\pi}{28} + i\frac{2k\pi}{7}} \right\}.$$

Solution de l'exercice 2 La fonction arcsin est continue sur le segment $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, donc l'intégrale I existe. Posons

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \arcsin(x). \end{cases}$$

Les fonction u et v sont \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$I = [x \arcsin(x)]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or on reconnaît du $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Donc

$$I = \frac{\pi}{12} - \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

Conclusion,

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$