Exo 9 A

Exercice 1 soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{3}k} + e^{-i\frac{\pi}{3}k}}{2}$$ ok plus rapide par $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)$

$$\Rightarrow 2S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}k}}{2^k} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}k}}{2^k} \right)$$ ok

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \right)^k$$

on reconnaît... $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \neq 1$

$$2S_n = \frac{\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \times \left[1 - \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}} + \frac{\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \times \left[1 - \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}}$$

$$2S_n = \frac{\left(1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right) \times \left(1 - \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n\right) + \left(1 - \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right) \times \left(1 - \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n\right)}{\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)}$$

A reprendre.

$$2S_n = \frac{-\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} + \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{n+1} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}}{3/4}$$

$$2S_n = \frac{-\cos\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{3/4} \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{-2\cos\frac{\pi}{3}}{3} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{3 \times 2^n}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(-k\frac{\pi}{3}\right)$$ ✓ par parité de la fonction cosinus ✓

on pose $\tilde{k} = k + n$ ⚠

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=n+1}^{2n} \frac{1}{2^{\tilde{k}-n}} \cos\left((-\tilde{k}+n)\frac{\pi}{3}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^{k-n}} \cos\left((-k+n)\frac{\pi}{3}\right)$$ ✓

$$S_n = 2^n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^k} \cos\left((n-k)\frac{\pi}{3}\right)$$ ✓ par parité de la fonction cosinus

D'où

$$S_n = 2^n \times T_n$$ ✓

$$\Leftrightarrow \boxed{T_n = S_n \times 2^{-n}}$$ bien

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ oui

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ V

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ V

On trouve de manière ~~triviale~~ $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^5 = A^{n}$ V

Donc on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

pour $n=1$, $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

pour $n=2$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et pour $n>2$, $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bien.