Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$

impossible de fixer k dans la somme il varie entre 1 et n...

Si $k \equiv 1[\pi]$, $S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Si $k \equiv 6[\pi]$, $S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Si $k \equiv 2[\pi]$, $S_n = -\frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

Si $k \equiv 3[\pi]$, $S_n = -2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$

Or $\frac{1}{2^n} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+n}} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ ✓

On pose $\hat{k} = k+n$ oui $\Leftrightarrow k = \hat{k} - n$ ✓

$\frac{1}{2^n} S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^k} \cos\left((k-n)\frac{\pi}{3}\right)$ bien. car indice de sommation muet.

Ainsi $T_n = \frac{1}{2^n} S_n$ ✓

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$A^2 = A \times A$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ oui

$A^3 = A^2 \times A$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\forall n \in \mathbb{N}$

On a donc $A^3 = 0$ ✓ Ainsi $A^{n+3} = A^n \times A^3$ donc $A^n = 0$ oui

pour $n \geq 3$. OK.

Conclusion encadrée ?