Exercice Autonome 10.

Exercice 1.

Soit $f : x \longmapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit D_f le domaine de définition de f.

$x \in D_f \iff \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \\ 1+x^2 \neq 0 \end{cases}$ oui ✓

$\iff \begin{cases} -1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2 & \text{car } 1+x^2 > 0. \\ x \in \mathbb{R} & \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2 > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -1-x^2-2x \leq 0 \\ x^2+1-2x \geq 0 \end{cases}$ ✓

$\iff \begin{cases} x^2+2x+1 \geq 0 \\ x^2-2x+1 \geq 0 \end{cases}$ ✓

$\iff \begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$ oui

D'où $x \in D_f \iff x \in \mathbb{R}$ ✓ Conclusion encadrée ?

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit D' le domaine de dérivabilité de f.

$$x \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}$$ d'après la question précédente. OK

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$ oui

3. f est dérivable (en x) sur $D' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

or $]1, +\infty[\subset D'$ ✓

Alors f est dérivable $(\forall x > 1)$, sur $]1; +\infty[$

$\forall x > 1$,

$$f'(x) = \left[\frac{2x}{1+x^2}\right]' \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$ ✓

$$= \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2 \times \sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(2x)^2}{(1+x^2)^2}}}$$ ✓

$$= \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2) \times \sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}}$$ CAR $1+x^2 > 0$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2) \times \sqrt{(x^2-1)^2}}$$ ✓ car $\forall x \in D'$, $x^2-1 \neq 0$

$$= -\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$$ car ...

$$= -\frac{2}{(1+x^2)}$$ oui à encadrer !

4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus ... $

on obtient

$$\frac{-2}{-1+x^2} = \frac{2}{-x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Non. C'est bien plus simple, cf corrigé.

Posons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x-1)}$$

$$= \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}.$$

On a

$$a(x-1)+b(x+1) = 2.$$

$\Leftrightarrow$

$$ax - a + bx + b = 2$$

$\Leftrightarrow$ $x(a+b) + (b-a) = 2$

par unicité de l'écriture polynomiale

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-a = 2 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

De plus on a aussi

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2 /$$

$$\frac{a'}{(x-1)} + \frac{b'}{(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

Ce qui donne $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = -1 \end{cases}$

Donc on a deux couples solutions selon le dénominateur

$(a,b) = (-1, 1)$ et $(a',b') = (1,-1)$.

Or on remarque que $a = b'$ et $a' = b$, on prend donc le premier couple, celui ne change rien

On a donc $\forall x > 1$, $f' = \frac{2}{x^2-1} = \frac{-1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)}$

f' est dérivable sur D' par somme, on peut donc intégrer f' on note F sa primitive définie $\forall x > 1$

$$F(x) = -\ln(x+1) + \ln(x-1) \quad \text{car } \forall x > 1,\ x+1 > 0,\ x-1 > 0$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

On a donc $\forall x \in]1, +\infty[$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 2

Pour tout $x \in [0, 1]$, $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ existe et est continue et dérivable, $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est C^1 sur $[0, 1[$.

faux en 1

Posons $x = \cos(t)$, ~~$\forall x \in [0,1]$~~, $x \mapsto \cos(x)$ est C^1 sur $[0;1]$

$dx = \ldots$

On a $I = \int_{\cancel{\cos}(0)}^{\cancel{\cos}(1)} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-\sin(t))\, dt$ Non

$$= \int_1^0 -\sqrt{1-1+\sin^2(t)}\ \sin(t)\, dt$$

$$= -\int_0^1 -\sin(t)^2\, dt$$

$$= \int_0^1 \sin(t)^2\, dt = \left[\frac{1}{3}\sin(t)^3\right]_0^1 = 0$$

on a donc

$$I = \int_{\cos(0)}^{\cos(x)} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-\sin(t))\,dt$$

$$= \int_1^{0} -\sqrt{1-1+\sin^2(t)}\,\sin(t)\,dt$$??

car...

$$= \int_1^0 -\sin(t)^2\,dt$$

$$= \int_1^0 -\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$ v

$$= \int_1^0 -\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 1-\cos(2t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_1^0 1\,dt - \int_1^0 \cos(2t)\,dt\right]$$ Cohérent

$$= -\frac{1}{2}\left[\left[x\right]_1^0 - \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_1^0\right]$$

?

$$= -\frac{1}{2}\left[-1\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

OK cf corrigé.