Correction Automne 10
Fonctions usuelles et changement de variable

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction arcsin n'est définie que sur $[-1;1]$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \\ 1+x^2 \neq 0 \text{ toujours vrai} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad -1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2>0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant x^2+2x+1 \\ 0 \leqslant 1-2x+x^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant (x+1)^2 \text{ toujours vrai} \\ 0 \leqslant (1-x)^2 \text{ toujours vrai} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Conclusion, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

2. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Donc de même qu'à la question précédente, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}' \quad & \Leftarrow \quad -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad -1-x^2 < 2x < 1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2>0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < (x+1)^2 \\ 0 < (1-x)^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Conclusion, la fonction f est dérivable sur

$$\boxed{\mathcal{D}' =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[.}$$

3. Par la question précédente, f est dérivable sur $]1;+\infty[$. De plus pour tout $x \in]1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2\left(1+x^2\right)-(2x)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= \frac{2\left(1+x^2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} && \text{car } 1+x^2>0 \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}} \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2} \frac{1}{x^2-1} && \text{car } x^2-1>0 \text{ car } x>1 \\
&= -\frac{2}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall x \in]1;+\infty[, \qquad f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}.}$$

4. Puisque $]1;+\infty[$ est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ (au contraire de $\mathcal{D}'$ par exemple), on en déduit

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]1;+\infty[, \qquad f(x) = -2\arctan(x) + C.$$

Or la fonction f et la fonction arctan sont continues en 1 donc par passage à la limite quand $x \to 1$, on obtient

$$f(1) = -2\arctan(1) + C.$$

Autrement dit, la relation reste vraie pour $x = 1$. On en déduit également que

$$\arcsin\left(\frac{2}{1+1}\right) = -2\frac{\pi}{4} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [1;+\infty[, \qquad f(x) = \pi - 2\arctan(x).}$$

NB1 : On pouvait aussi prendre la limite en $+\infty$ ou la valeur de $\sqrt{3}$ pour obtenir C.

NB2 : On peut aussi obtenir une expression de f sur $[-1;1]$ et/ou sur $]-\infty;-1]$. Pour ce dernier intervalle on peut aussi se servir de son imparité.

Solution de l'exercice 2 La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est continue et positive sur $[-1;1]$ donc sur $[0;1]$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur le segment $[0;1]$. Donc I existe.
Posons pour tout $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $x = \varphi(t) = \cos(t)$ i.e. pour tout $x \in [0;1]$, $t = \arccos(x)$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$

sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(t)}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car pour tout } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(t) \geqslant 0 \\
&= \int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 - 0 + 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}.}$$