Correction Automne 11
Géométrie complexe

Solution de l'exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Puisque $z \neq i$, on note que $A \neq M$ et $i - z \neq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & AMN \text{ rectangle en } M \\ \Leftrightarrow & \left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MN}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi] \\ \Leftrightarrow & \arg\left(z_M - z_N\right) - \arg\left(z_A - z_M\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi] \\ \Leftrightarrow & \arg\left(z - \left(z^2 + z + 1\right)\right) - \arg\left(i - z\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi] \\ \Leftrightarrow & \arg\left(\dfrac{-z^2 - 1}{i - z}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi] \qquad \text{car } i - z \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z^2+1}{z-i} \in i\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z^2+1}{z-i} = -\overline{\left(\dfrac{z^2+1}{z-i}\right)} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z^2+1}{z-i} = -\dfrac{\overline{z}^2+1}{\overline{z}+i} \\ \Leftrightarrow & |z|^2 z + iz^2 + \overline{z} + i = -\left(|z|^2 \overline{z} + z - i\overline{z}^2 - i\right) \qquad \text{car } z - i \neq 0 \\ \Leftrightarrow & |z|^2 z + iz^2 + \overline{z} + i = -|z|^2 \overline{z} - z + i\overline{z}^2 + i \\ \Leftrightarrow & |z|^2 \left(z + \overline{z}\right) + i\left(z^2 - \overline{z}^2\right) + z + \overline{z} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\left(z\right) |z|^2 + i\left(z - \overline{z}\right)\left(z + \overline{z}\right) + 2\mathrm{Re}\left(z\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\left(z\right) |z|^2 + i\left(2i\right) \mathrm{Im}(z) 2\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{Re}\left(z\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Re}(z) = 0 \ \text{ OU } \ |z|^2 - 2\mathrm{Im}\left(z\right) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & z \in i\mathbb{R} \ \text{ OU } \ |z|^2 - 2\mathrm{Im}\left(z\right) + 1 = 0. \end{array}$$

Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors,

$$\begin{array}{lll} |z|^2 - 2\mathrm{Im}\left(z\right) + 1 = 0 & \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - 2b + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & a^2 + (b-1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & a = 0 \ \text{ ET } \ b = 1 \\ & \Leftrightarrow & z = i. \end{array}$$

Or par hypothèse, $z \neq i$. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = i\mathbb{R} \setminus \{i\}.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ Pour être un triangle rectangle isocèle en M, il faut notamment être rectangle en M. Donc par la question précédente, on sait déjà que $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ i.e. il existe $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $z = ib$.

Méthode 1. On a alors les équivalences suivantes,

$$\begin{array}{ll} & AMN \text{ isocèle rectangle en } M \\ \Leftrightarrow & AM = MN \\ \Leftrightarrow & |z_M - z_A| = |z_N - z_M| \\ \Leftrightarrow & |z_M - z_A|^2 = |z_N - z_M|^2 \qquad \text{car les modules sont positifs} \\ \Leftrightarrow & |ib - i|^2 = \left|(ib)^2 + ib + 1 - ib\right|^2 \\ \Leftrightarrow & |i|^2 \, |b-1|^2 = \left|-b^2 + 1\right|^2 \\ \Leftrightarrow & (b-1)^2 = \left(b^2 - 1\right)^2 \qquad \text{car } b - 1 \in \mathbb{R} \text{ et } b^2 - 1 \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & (b-1)^2 = (b-1)^2 (b+1)^2 \\ \Leftrightarrow & b - 1 = 0 \ \text{ OU } \ 1 = (b+1)^2 \\ \Leftrightarrow & b = 1 \ \text{ OU } \ b + 1 = 1 \ \text{ OU } \ b + 1 = -1 \\ \Leftrightarrow & b = 0 \ \text{ OU } \ b = -2 \\ \Leftrightarrow & z = 0 \ \text{ OU } \ z = -2i. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0; -2i\}.}$$

Méthode 2. Pour que AMN soit isocèle rectangle, il faut et il suffit que N soit l'image de A par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. On obtient donc les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & AMN \text{ isocèle rectangle en } M \\ \Leftrightarrow & z^2 + z + 1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} (i - z) + z \ \text{ OU } \ z^2 + z + 1 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} (i - z) + z \\ \Leftrightarrow & -b^2 + ib + 1 = i(i - ib) + ib \ \text{ OU } \ -b^2 + ib + 1 = -i(i - ib) + ib \\ \Leftrightarrow & -b^2 + ib + 1 = -1 + b + ib \ \text{ OU } \ -b^2 + ib + 1 = 1 - b + ib \\ \Leftrightarrow & b^2 + b - 2 = 0 \ \text{ OU } \ b^2 - b = 0 \\ \Leftrightarrow & (b-1)(b+2) = 0 \ \text{ OU } \ b(b-1) = 0 \\ & \qquad \text{car 1 est une racine évidente de la première équation} \\ \Leftrightarrow & b - 2 = 0 \ \text{ OU } b = 0 \qquad \text{car } b \neq 1 \\ \Leftrightarrow & z = -2i \ \text{ OU } \ z = 0. \end{array}$$

Conclusion, on retrouve le même ensemble :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0; -2i\}.}$$