

## Exercice Noël 10 - DL et Equations différentielles

Exo 1 On a:  $F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  avec  $f: t \mapsto \arctan(t^2)$ .

$f$  est définie et même  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0.  $\checkmark$  En effet  $f$  est infiniment dérivable donc de dérivée toujours continue. Donc  $f$  admet un développement limité d'ordre 16 en 0.  $\checkmark$  soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\forall t \in [0, x], \underset{t \rightarrow 0}{f(t)} = t^2 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{5}t^{10} - \frac{1}{7}t^{14} + o(t^{16})$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, on a par ailleurs que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0, x]$ .  $\text{oui}$   
alors par le théorème de primitivation des développements limités:  $F$  admet un développement limité d'ordre 17 en 0 donné par:

$$F(x) = F(0) + \underset{x \rightarrow 0}{\frac{x^3}{3}} - \frac{16x^7}{84} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105} + o(x^{17}) \quad \text{oui}$$

$$\text{plus: } \boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{84} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105} + o(x^{17})} \quad \text{lien.}$$

Exo 2:

Réoudre (E):  $\forall x \in \mathbb{R}, 3y''(x) + 4y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = x$ .

Déterminons les solutions de l'équation homogène (E<sub>0</sub>).

$$(E_0): \forall x \in \mathbb{R}, 3y''(x) + 4y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est:

$$(E_c): 3r^2 + 4r + \frac{1}{3} = 0.$$

Le discriminant associé est  $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 12$ .  $\checkmark$

Les racines associées sont:

$$r_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{3} \quad \checkmark \text{ et } r_2 = \frac{-2 + \sqrt{3}}{3} \quad \checkmark$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x_1 x} \end{array} ; \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x_2 x} \end{array} \right) \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Déterminons la solution particulière  $y_p$  de (E).

Le second membre de (E) est sous la forme  $x \mapsto P(x)e^{mx}$

avec  $m = 0$  donc  $m \neq x_1$  et  $m \neq x_2$ .

de plus  $\deg(P) = 1$ . ✓

on cherche donc  $y_p \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y_p = ax + b$ . ✓

de plus  $y_p \in \mathcal{E}^2$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, y_p'(x) = a$  et  $y_p''(x) = 0$ . ✓

On a donc :

$y_p$  solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 3y_p''(x) + 4y_p'(x) + \frac{1}{3}y_p(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 4a + \frac{1}{3}ax + \frac{1}{3}b = x. \quad \checkmark$$

On note qu'il suffit d'avoir : ✓

$$\begin{cases} 4a + \frac{1}{3}b = 0 \\ \frac{1}{3}a = 1 \end{cases} \quad \checkmark \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \times 4 \times 3 \\ a = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b = -36 \\ a = 3 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\text{On a donc : } \forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = 3x - 36 \quad \checkmark$$

Les solutions de (E) sont donc :

Bien

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x - 36 + Ae^{\frac{-2-\sqrt{3}}{3}x} + Be^{\frac{-2+\sqrt{3}}{3}x} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= y_p + \mathcal{S}_0 \quad \text{avec } y_0 \in \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$