Exo 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $z \in \mathbb{C}$

$(z+i)^n - (z-i)^n = 0 \iff (z+i)^n = (z-i)^n$ ✓

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z+i = (z-i)\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ dm

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = i\left(-1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ ✓

$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = \dfrac{i\left(-1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ ou $0 = -2i$ impossible OK

$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = -i\, \dfrac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ ✓

$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = -i \times \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}$ ✓

$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = -i\, \dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ ✓

$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = \dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ ✓

Conclusion,

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 0 \iff z \in \left\{ \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![1, n-1]\!] \right\}.$$

TB

Exo 2

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = \displaystyle\int_a^b f(t) \sin(nt)\, dt$

posons $\forall t \in [a,b]$, $u(t) = f(t)$ $\quad v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$, u et v sont C^1 sur $[a,b]$ ✓

~~donc~~ et $\forall t \in [a,b]$ $u'(t) = f'(t)$ $\quad v'(t) = \sin(nt)$ ✓

Par intégration par partie.

$$I_n = -\frac{1}{n}\left[f(t)\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\, dt$$

posons $\forall t \in [a,b]$, $a(t) = f'(t)$ et $b(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$
a et b sont C^1 sur $[a,b]$ NON ! $f\ C^1 \not\Rightarrow f'\ C^1$.
car f C^1 sur $[a,b]$ $a'(t) = f''(t) = c$, cte, $b'(t) = \cos(nt)$
??
A reprendre.

Par intégration par partie.

$$I_n = -\frac{1}{n}\left[f(t)\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\left[f'(t)\sin(nt)\right]_a^b - \int_a^b \frac{c}{n}\sin(nt)\,dt\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\left[f(t)\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n^2}\left(\left[f'(t)\sin(nt)\right]_a^b + \frac{c}{n}\left[\cos(nt)\right]_a^b\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\left[f(t)\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n^2}\left(\left[f'(t)\sin(nt)\right]_a^b\right) + \frac{c}{n^3}\left[\cos(nt)\right]_a^b$$

Donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c\left[\cos(nt)\right]_a^b}{n^3}$$

Donc

$$|I_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{c(|\cos(nb) - \cos(na)|)}{n^3}}_{U_n}$$

Or par inégalité triangulaire

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n < \frac{c(|\cos(nb)| - |\cos(na)|)}{n^3} < \frac{c|\cos(nb)|}{n^3} < \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow u_n \to 0 \Rightarrow I_n \to 0$ plus direct

or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs car U_n découle d'une valeur absolue, $U_n \sim |I_n|$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ converge.

Donc par le théorème des équivalents des séries à termes strictement positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n|$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n$ converge donc

par définition

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$