TD1
Logique et raisonnement

Eléments de logique

Exercice 1 - *Solution*. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

1. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$.
2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.
3. $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow R$.
4. $(P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)$.

Indication : dresser la table de vérité des différentes assertions.

Exercice 2 - *Solution*. Soient P et Q deux assertions. La proposition suivante : $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow (non(P) \text{ OU } Q)$ est-elle vraie ?

Exercice 3 - *Solution*. Soient P, Q, R et S quatre assertions. Ecrire la négation de $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

Exercice 4 - *Solution*. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et P, Q et R les assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} P : & \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0, \\ Q : & \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0, \\ R : & (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \text{ OU } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0). \end{array}$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont exactes ?

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $Q \Rightarrow R$
4. $non(R) \Rightarrow Q$
5. $non(Q) \Rightarrow non(P)$
6. $non(P) \Rightarrow non(R)$

Lorsque l'affirmation est fausse, en donner un contre-exemple.

Exercice 5 - *Solution*. Ecrire les propositions suivantes et leurs négations à l'aide de quantificateurs et dire lesquelles sont vraies.

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
4. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
5. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 6 - *Solution*. Déterminer toutes les propositions l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs avec leur variable et préciser leur véracité.

$$1) \qquad \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy.$$

Exercice 7 - *Solution*. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Enoncer en français les assertions suivantes et écrire avec des quantificateurs leurs négations.

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = C$.
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$.
4. $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
5. $\forall x \in I,\ \ f(x) > 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Exercice 8 - *Solution*. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes puis les nier.

1. La fonction f s'annule sur I.
2. La fonction f est la fonction nulle sur I.
3. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur sur I.
4. La fonction f admet un minimum sur I.
5. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes sur I.

Exercice 9 - *Solution*. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et écrire leurs négations.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.

Exercice 10 - *Solution*. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans chacun des cas suivants dire si l'assertion est vraie ou fausse et la nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

Exercice 11 - *Solution*. Préciser la validité des énoncés suivants puis les nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m$ divise n.
2. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m$ divise n.
3. $\exists a \in \mathbb{R}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}^*,\ |a| \leqslant \varepsilon$.
5. $\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 2^n > M$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y < x$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x + 1 \neq 0 \text{ OU } x + 2 \neq 0)$.

Méthodes et raisonnements

Exercice 12 - *Solution*. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 13 - *Solution*. Démontrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0\right) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0).$$

Exercice 14 - *Solution*. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$.

Exercice 15 - *Solution*. Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geqslant 0$.

Exercice 16 - *Solution*. Soient $a_1, \dots, a_9$ neuf entiers naturels tels que $a_1 + \cdots + a_9 = 90$. Démontrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Exercice 17 - *Solution*. Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 18 - *Solution*. Soit x un irrationnel positif. Démontrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 19 - *Solution*. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = P(x)$.

Exercice 20 - *Solution*. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 21 - *Solution*. Montrer que lorsque qu'un réel peut s'écrire de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}$, alors l'écriture est unique.

Exercice 22 - *Solution*. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires tel que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ soit paire.

Exercice 23 - *Solution*. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Exercice 24 - *Solution*. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 25 - *Solution*. Déterminer tous les réels x strictement positifs vérifiant l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 26 - *Solution*. Soient s et p deux réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux réels dont la somme vaut s et le produit vaut p.

Exercice 27 - *Solution*. On cherche l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(y) - f(x)| = |y - x|$.

1. **Analyse.** Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ \delta(x) = f(x) - f(0)$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta(y)\delta(x) = yx$.
   (b) En déduire la forme de f.
2. **Synthèse.** Conclure.

Exercice 28 - *Solution*. Soit $q \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$...), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 29 - *Solution*. Démontrer les formules suivantes :

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 30 - *Solution*. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Exercice 31 - *Solution*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 32 - *Solution*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} \cdots + \frac{u_n}{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n$.

Exercice 33 - *Solution*. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 34 - *Solution*. On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Réponses

Solution de l'exercice 1 - *Enoncé*. On a $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ET } Q) \Rightarrow R]$.
Lorsque P et R sont fausses et que Q est vraie alors l'assertion 1 est fausse tandis que l'assertion 2 est vraie.
Lorsque P est vraie et que Q et R sont fausses alors l'assertion 1 est vraie tandis que l'assertion 4 est fausse.
Lorsque P est vraie et que Q et R sont fausses alors l'assertion 2 est vraie tandis que l'assertion 4 est fausse.

Solution de l'exercice 2 - *Enoncé*. Naturellement !

Solution de l'exercice 3 - *Enoncé*. $(non(P) \text{ OU } Q) \text{ ET } (R \text{ ET } non(S))$

Solution de l'exercice 4 - *Enoncé*.

1. Vrai.
2. Faux. Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ s'annule en 0 mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Faux. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ en est encore un contre-exemple.
4. Vrai (invoquer le théorème des valeurs intermédiaires).
5. Vrai c'est la contraposée du 1.
6. Faux. Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ vérifie $f(1) \neq 0$ et pourtant f n'est pas de signe constant.

Solution de l'exercice 5 - *Enoncé*.

1. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n < m$
   Sa négation est $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z},\ n \geqslant m$.
   L'affirmation initiale est vraie (prendre $m = n + 1$).
2. $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = km$
   Sa négation est $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ n \neq km$ ce qui peut aussi s'écrire $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z}, n \notin m\mathbb{Z}$.
   En prenant $n = 0$ on montre bien que l'affirmation initiale est vraie.
3. $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists\, \omega \in \mathbb{C},\ \omega^2 = z$
   Sa négation est $\exists z \in \mathbb{C},\ \forall\, \omega \in \mathbb{C},\ \omega^2 \neq z$Tout complexe possède au moins une racine carré dans $\mathbb{C}$.
   L'affirmation initiale est vraie. En notant $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ la forme polaire du complexe z et en posant $\omega = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/2}$ par exemple, on obtient bien $\omega^2 = z$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall\,(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ x \neq \frac{p}{q}$. On peut également résumer cette affirmation par $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists\,(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{p}{q}$.
   L'affirmation initiale est fausse (exemple $\sqrt{2}$, π, e, ...)
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant x^2$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbb{R},\ x < x^2$.
   L'affirmation initiale est vraie (et même pour tous les réels dans $[-1;1]$, démo ?).
6. $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists\,(a,b) \in \{x,y,z\}\,,\ ab \geqslant 0$.
   Sa négation est $\exists\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall\,(a,b) \in \{x,y,z\}\,,\ ab < 0$.
   L'affirmation initiale est vraie (faire des disjonctions de cas).

Solution de l'exercice 6 - *Enoncé*. La permutation de deux quantificateurs $\forall$ voisins ne modifie pas l'affirmation. On peut donc obtenir trois propositions :

$$\begin{array}{ll} 2) & \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy \\ 3) & \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy \\ 4) & \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy. \end{array}$$

1) est fausse. Montrons sa négation : $non(1) : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists\,(y,z) \in (\mathbb{R}^*)\,2, \quad z = xy$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = 1$ et $z = x$ la négation est démontrée et donc 1) est fausse.
2) est fausse. Sa négation est $\exists y \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists z \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy$. Par exemple pour $y = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en prenant $z = x$ la négation est démontrée et donc 2) est fausse.
3) est vraie. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Puisque $y \neq 0$, on peut poser $x = \frac{z}{y}$. Comme $z \neq 0$, on a bien $x \in \mathbb{R}^*$ et de plus $z = xy$.
4) est fausse. Sa négation est $\exists z \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists y \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy$. Prenons $z = 1$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors puisque $x \neq 0$, en posant $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$, on a bien $1 = xy$. Donc sa négation est vraie et 4) est fausse.

Solution de l'exercice 7 - *Enoncé*.

1. La fonction f est constante (sur I). Sa négation est $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \neq C$.
2. En prenant la contraposée de l'implication : la fonction f ne s'annule pas sauf peut-être en 0 (et elle fait ce qu'elle veut en 0). La négation est $\exists x \in I \setminus \{0\},\ f(x) = 0$.
3. La fonction f est surjective sur $\mathbb{R}$: tout élément de $\mathbb{R}$ admet un antécédent par f. La négation est $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \neq y$.
4. La fonction f est croissante sur I. La négation est $\exists (x,y) \in I^2,\ x > y$ tel que $f(x) \leqslant f(y)$ (et ne correspond pas à f décroissante !)

5. En prenant la contraposée, on obtient que f est négative (ou nulle) sur $\mathbb{R}_+^* \cap I$. La négation est $\exists x \in I,\ x > 0$ tel que $f(x) > 0$.

Solution de l'exercice 8 - *Enoncé*.

1. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$. La négation est $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0$. La négation est $\exists x \in I,\ f(x) \neq 0$.
3. $\forall\,(x, y) \in I^2,\ f(x) \neq f(y)$. La négation est $\exists\,(x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y)$.
4. $\exists x \in \mathbb{I},\ \forall y \in I,\ f(y) \geqslant f(x)$. A ne pas confondre avec l'existence d'un minorant qui est donné par $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall y \in I,\ f(y) \geqslant m$. La négation de l'assertion initiale est $\forall x \in I,\ \exists y \in I,\ f(y) < f(x)$.
5. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \geqslant M$. La négation est $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) < M$ (qui correspond à f majorée sur I).

Solution de l'exercice 9 - *Enoncé*.

1. Faux (contre-exemple ?). La négation est $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0$.
2. Vrai (démo ?). La négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0$.
3. Faux (contre-exemple ?). La négation est $\exists\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \leqslant 0$.
4. Vrai (démo ?). La négation est $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leqslant x$.

Solution de l'exercice 10 - *Enoncé*.

1. Vrai. Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ n > N$.
2. Vrai. Négation : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N$.
3. Vrai. Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \neq f(x)$ ou encore $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \notin \mathbb{R}$.
4. Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \neq f(x)$.

Solution de l'exercice 11 - *Enoncé*.

1. Vrai. Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ km \neq n$.
2. Vrai. Négation : $\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ km \neq n$.
3. Faux. Négation : $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \exists\,\varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon$.
4. Vrai. Négation : $\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ |a| > \varepsilon$.
5. Vrai. Négation : $\exists M > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ 2^n \leqslant M$.
6. Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \geqslant x$.
7. Vrai. Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ (x + 1 = 0 \text{ ET } x + 2 = 0)$.

Solution de l'exercice 12 - *Enoncé*.

1. En justifiant avec soin, élever au carré et développer.
2. Supposer $a > b$ par exemple (puis faire de même avec $b > a$) et utiliser la question précédente avec $a' = a - b$ et $b' = b$.

Solution de l'exercice 13 - *Enoncé*. Vérifier que $\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$ et $-\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$. En déduire que $\alpha\beta = 0$ puis conclure.

Solution de l'exercice 14 - *Enoncé*. Montrer que l'assertion recherchée est équivalente à l'inégalité bien connue : $(x + y)^2 \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 15 - *Enoncé*. Elever au carré en justifiant avec soin chacune des équivalences.

Solution de l'exercice 16 - *Enoncé*. Procédons pas l'absurde. On cherche à démontrer l'assertion suivante :

$$\exists\,(i, j, k) \in [\![1; 9]\!],\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k \text{ tel que } a_i + a_j + a_k \geqslant 30.$$

Supposons donc sa négation. On suppose que

$$\forall\,(i, j, k) \in [\![1; 9]\!],\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k \text{ on a } a_i + a_j + a_k < 30.$$

En particulier pour $(i, j, k) = (1, 2, 3)$, on a $a_1 + a_2 + a_3 < 30$. De même pour $(i, j, k) = (4, 5, 6)$, $a_4 + a_5 + a_6 < 30$ et enfin $a_7 + a_8 + a_9 < 30$. Par conséquent,

$$90 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{<30} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6}_{<30} + \underbrace{a_7 + a_8 + a_9}_{<30} < 90,$$

ce qui est absurde. Conclusion,

$\boxed{\text{on a bien montré qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieurs ou égale à 30.}}$

Solution de l'exercice 17 - *Enoncé*. Procéder par l'absurde. Utiliser la bijectivité du logarithme. Montrer que si $2^p = 3^q$ et si $p \neq 0$ alors 2 divise 3^q. En déduire que $p = 0$ puis conclure.

Solution de l'exercice 18 - *Enoncé*. Procéder par l'absurde et élever au carré.

Solution de l'exercice 19 - *Enoncé*. Faire le rapport et passer à la limite quand $x \to +\infty$ (croissance comparée).

Solution de l'exercice 20 - *Enoncé*. Montrons la contraposée : si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8. Supposons n impair. Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Par conséquent,

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k\,(k + 1)\,.$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\,(k + 1)$ est pair.

- En effet, si k est pair alors 2 divise k et donc $k(k+1)$. Donc $k(k+1)$ est pair.
- Si k est impair, alors $k+1$ est pair, 2 divise $k+1$ et donc $k(k+1)$. Donc $k(k+1)$.

Dans tous les cas, on a montré que $k(k+1)$ est pair, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2p$. Finalement,

$$n^2 - 1 = 4 \times 2p = 8p,$$

est bien divisible par p. On a donc ainsi montré l'implication $(n \text{ est impair }) \Rightarrow \left(n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\left(n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8\right) \Rightarrow (n \text{ est pair }).}$$

Solution de l'exercice 21 - *Enoncé*. Soient $(a, b) \in Z^2$ et $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$. Par conséquent, $a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$.

- Premier cas, $b = b'$. Alors $a - a' = 0$ et donc $a = a'$, ce qui conclut l'unicité du couple dans ce cas là.
- Second cas, supposons que $b \neq b'$. Alors $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b'-b}$. Or $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b' - b \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi, $\frac{a-a'}{b'-b} \in \mathbb{Q}$. D'où $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc ce second cas n'est jamais valide et donc le premier cas est toujours vrai.

Conclusion $\boxed{\text{si } a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}, \text{ avec } (a, a', b, b') \in \mathbb{Z}^4 \text{ alors } (a, b) = (a', b')}$.

Solution de l'exercice 22 - *Enoncé*. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ telle que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ soit paire. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(x) = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(-x) && \text{par parité de la fonction } f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \\
\Rightarrow\quad & f(x) - x = f(-x) + x \\
\Rightarrow\quad & f(x) - x = -f(x) + x && \text{par imparité de la fonction } f \\
\Rightarrow\quad & 2f(x) = 2x \\
\Rightarrow\quad & f(x) = x.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que l'unique candidate à la solution du problème est la fonction $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
Synthèse. Si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, alors il est clair que f est impaire et $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est une fonction paire. Donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est bien une solution du problème.
Conclusion, $\boxed{\text{l'unique solution au problème posée est } f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}$.

Solution de l'exercice 23 - *Enoncé*. On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n+m) = f(n) + f(m)$. En particulier, pour $n = m = 0$,

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Donc $f(0) = 0$. Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $f(n) = nf(1)$ » est vraie.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $0 \times f(1) = 0 = f(0)$, par ce qui précède. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. que $f(n) = nf(1)$. Alors, en prenant $m = 1$, on a

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) \qquad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Donc $f(n+1) = (n+1)f(1)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie à son tour.
Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.
On a ainsi montré que SI f est une solution, nécessairement il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$.
Synthèse. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$. Alors pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$f(n+m) = a(n+m) = an + am = f(n) + f(m).$$

Donc f est une solution à notre problème.
Conclusion.

$$\boxed{\text{Une fonction } f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \text{ est solution à notre problème si et seulement s'il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an \text{ (ce sont les fonctions linéaires de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{R}).}$$

Solution de l'exercice 24 - *Enoncé*. Démontrer par analyse-synthèse que l'unique solution du problème est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$.

Solution de l'exercice 25 - *Enoncé*. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x \qquad \Leftrightarrow \qquad (x = 1 \text{ OU } x = 2).$$

Solution de l'exercice 26 - *Enoncé*. Soient $(s, p) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left[\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}\right] \qquad \Leftrightarrow \qquad s^2 - 4p \geqslant 0.$$

Solution de l'exercice 27 - *Enoncé*.

1. (a) Ecrire $\delta(y)\delta(x)$ comme une somme/différence de carrés.
   (b) Si f est solution alors
   - il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$

   OU

   - il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + a$.
2. **Synthèse.** On vérifie que les précédentes fonctions sont bien solutions.

Solution de l'exercice 28 - *Enoncé*. Si $q = 1$, le résultat est immédiat. Si $q \neq 1$, procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 29 - *Enoncé*. Par récurrence. Voir également le chapitre 4 pour d'autres techniques.

Solution de l'exercice 30 - *Enoncé*. Faire une récurrence double pour chaque question.

Solution de l'exercice 31 - *Enoncé*. Constater que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ puis reconnaitre une suite géométrique (ou raisonner par récurrence).

Solution de l'exercice 32 - *Enoncé*. Procéder par récurrence forte.

Solution de l'exercice 33 - *Enoncé*. Par une récurrence simple.

Solution de l'exercice 34 - *Enoncé*. Par une récurrence triple.