TD2
Fonctions réelles

Démarrage

Exercice 1 - *Solution*. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+x-2}{2x^3+7x^2+2x-3}}$.
2. $g : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
3. $h : x \mapsto \ln\left(\cos\left(2x+\pi\right)\right)$.
4. $i : x \mapsto \sqrt{\ln(x)-x^2+\frac{1}{2}}$.

Exercice 2 - *Solution*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left((x-1)^2+2\right)$. Déterminer les ensembles suivants.

1. $f(\mathbb{R})$
2. $f([-1;1])$
3. $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$
4. $f^{\leftarrow}([2;3])$

Exercice 3 - *Solution*. Décomposer les fonctions suivantes en composées de fonctions élémentaires et préciser la suite des ensembles images.

1. $f : x \mapsto \cos\left(e^{\sin(x)-1}\right)+1$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{\frac{-1}{\ln(1-4x^2)}}$.
3. $h : x \mapsto \ln^2\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)$.

Graphe d'une fonction

Exercice 4 - *Solution*. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x-1|+2|x+2|$.

Exercice 5 - *Solution*. Déduire des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto (2x+3)^2-2$.
2. $g : x \mapsto 1-\frac{2}{x-3}$.
3. $h : x \mapsto 2\,e^{\frac{x}{2}}$.
4. $i : x \mapsto -1-\frac{\cos(x-1)}{2}$.
5. $j : x \mapsto 2|x+2|-1$.

Propriétés

Exercice 6 - *Solution*. Déterminer la parité des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto 2x^6-5x^4+x^2+6$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(|x|)$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(x^3-2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
4. $f_4 : x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
6. $f_6 : x \mapsto \left|2x^2-e^{x^4}+\ln\left(x^2-1\right)\right|$.
7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto x^3\frac{\sin(x)-x}{2+\cos^2(x)}$.

Exercice 7 - *Solution*. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes et T-périodiques, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 - *Solution*. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante sur I et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur I. Montrer que f est strictement décroissante sur I.

Continuité, dérivation

Exercice 9 - *Solution*. Etudier le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes puis les dériver sur cet ensemble.

1. $f_1 : x \mapsto \cos^6(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(\ln(x))$.
3. $f_3 : x \mapsto e^{\sin(x)}$.
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{(x^2+1)^3}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}$.
6. $f_6 : x \mapsto x^2\,e^{\frac{1}{x}}$.
7. $f_7 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.

Exercice 10 - *Solution*. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : \quad x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

Fonction réciproque

Exercice 11 - *Solution*. Soit $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[, x \mapsto x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 12 - *Solution*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,
$$\lambda = \frac{2x}{1+x^2}.$$
2. La fonction f est-elle surjective ? Déterminer $f(\mathbb{R})$.
3. La fonction f est-elle injective ?
4. Montrer que la fonction $g : [-1; 1] \to [-1; 1], x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est bijective.
5. Retrouver ces résultats en étudiant les variations de f.

Exercice 13 - *Solution*. En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f :]1; +\infty[\to]0; +\infty[, x \mapsto \frac{1}{x-1}$.
2. $f :]-1; 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$.
3. $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[, x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - x$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$.

Exercice 14 - *Solution*. Soit $f :]0; +\infty[, x \mapsto 1 + x + 2\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et qu'elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un ensemble à J à préciser.
2. Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.

Etude d'une fonction

Exercice 15 - *Solution*. Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x\,e^{-x}$.
2. $x \mapsto \frac{2x^2+1}{x^2+3}$.
3. $x \mapsto \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}$.
4. $x \mapsto \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$.
5. $x \mapsto \frac{x^3+x+1}{x^2+4}$.
6. $x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$.
7. $x \mapsto \frac{x^3+x^2-x}{x^2-1}$.
8. $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{|x-1|-x}$.
9. $x \mapsto x + \sqrt{x}$.
10. $x \mapsto x^{\frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)}}$.

Exercice 16 - *Solution*. Etudier les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.
2. $x \mapsto e^{x\ln(x)}$.
3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
4. $x \mapsto \ln\left(1 + x + x^2\right)$.
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$.
6. $x \mapsto e^{x^2\ln(x)}$.
7. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.
8. $x \mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x}$.
9. $x \mapsto x^2\,e^{-x}$.
10. $x \mapsto \frac{2\ln(x)+3}{x}$.
11. $x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$.
12. $x \mapsto x + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

Exercice 17 - *Solution*. Soit f la fonction définie par
$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est impaire.
2. Calculer les limites de f et préciser les éventuelles asymptotes.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que f est bijective.
5. On pose $u = e^x - 1$ et $v = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de u et v. En déduire une expression de f' en fonction de f.
6. Sans calculer f^{-1}, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.
7. En déduire une expression explicite de f^{-1}.
8. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Exercice 18 - *Solution*. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} [2; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 - 4x + 5}. \end{array}$$

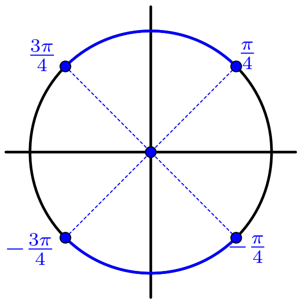
1. Prouver que f réalise une bijection de $[2; +\infty[$ sur son ensemble image. On note g sa fonction réciproque.
2. Sans calculer g, déterminer l'ensemble de dérivabilité de g, justifier que g admet une tangente verticale en 1 et montrer que pour tout y dans le domaine de dérivabilité, $g'(y)g(y) - 2g'(y) = y$.
3. En déduire une expression explicite de g.
4. Retrouver la question précédente par une méthode directe.

Exercice 19 - *Solution*. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \cos^5(x) + \sin^5(x)$.

Réponses

Solution de l'exercice 1 - *Enoncé*.

1. Factoriser le numérateur et le dénominateur. Pour le dénominateur, chercher une racine évidente a puis factoriser par $(x-a)$. On obtient
$$\mathscr{D}_f =]-3;-1[\cup]1/2;1]\cup[2;+\infty[.$$
On peut vérifier son résultat en observant que $f(0)$ existe bien ou encore que $\frac{x^2+x-2}{2x^3+7x^2+2x-3} \underset{x\to\pm\infty}{\approx} \frac{x^2}{2x^3} = \frac{1}{2x}$ ce qui « donne » son signe au voisinage des infinis.
2. $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
3. Dessiner sur le cercle trigonométrique les solutions :



$$\mathscr{D}_h = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[.$$
Vérifier en calculant $\cos(2x+\pi)$ en 0, $\frac{\pi}{2}$ par exemple.
4. Etablir les variations puis un maximum de la fonction $u : x\mapsto \ln(x)-x^2+\frac{1}{2}$. On en déduit que $\mathscr{D}_i=\emptyset$. Vérifier en calculant $u(1)$ ou $\lim_{+\infty} u$.

Solution de l'exercice 2 - *Enoncé*. En établissant par exemple son tableau de variation, on obtient

1. $f(\mathbb{R}) = [\ln(2);+\infty[$
2. $f([-1;1]) = [\ln(2);\ln(6)]$
3. $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
4. $f^{\leftarrow}([2;3]) = \left[1-\sqrt{\mathrm{e}^3-2};1-\sqrt{\mathrm{e}^2-2}\right]\cup\left[1+\sqrt{\mathrm{e}^2-2};1+\sqrt{\mathrm{e}^3-2}\right]$

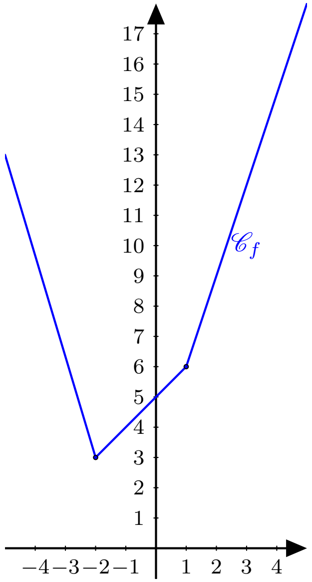
Solution de l'exercice 3 - *Enoncé*.

1. Posons $f_1 : x\mapsto \sin(x)$, $f_2 : x\mapsto x-1$, $f_3 : x\mapsto \mathrm{e}^x$, $f_4 : x\mapsto\cos(x)$, $f_5 : x\mapsto x+1$. Alors, f se décompose
$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f_1} & [-1;1] & \xrightarrow{f_2} & [-2;0] & \xrightarrow{f_3} & [\mathrm{e}^{-2};1] & \xrightarrow{f_4} & \left[\cos(1);\cos\left(\mathrm{e}^{-2}\right)\right] \\ x & \mapsto & \sin(x) & \mapsto & \sin(x)-1 & \mapsto & \mathrm{e}^{\sin(x)-1} & \mapsto & \cos\left(\mathrm{e}^{\sin(x)-1}\right), \end{array}$$
puis,
$$\begin{array}{ccc} \left[\cos(1);\cos\left(\mathrm{e}^{-2}\right)\right] & \xrightarrow{f_5} & \left[\cos(1)+1;\cos\left(\mathrm{e}^{-2}\right)+1\right] \\ \cos\left(\mathrm{e}^{\sin(x)-1}\right) & \mapsto & f(x). \end{array}$$
2. Posons $g_1 : x\mapsto 1-4x^2$, $g_2=\ln$, $g_3 : x\mapsto \frac{-1}{x}$, $g_4 : x\mapsto\sqrt{x}$. La fonction g se décompose alors,
$$\begin{array}{ccccccccc} \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[& \xrightarrow{g_1} &]0;1[& \xrightarrow{g_2} & \mathbb{R}_-^* & \xrightarrow{g_3} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{g_4} & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & 1-4x^2 & \mapsto & \ln\left(1-4x^2\right) & \mapsto & \frac{-1}{\ln(1-4x^2)} & \mapsto & g(x). \end{array}$$
3. Posons $h_1 : x\mapsto x-\frac{\pi}{4}$, $h_2=\cos$, $h_3 : x\mapsto x+1$, $h_4=\ln$ et $h_5 : x\mapsto x^2$. Posons également $U_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $U_2=\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Alors,
$$\begin{array}{ccccccc} U_1 & \xrightarrow{h_1} & U_2 & \xrightarrow{h_2} &]-1;1] & \xrightarrow{h_3} &]0;2] \\ x & \mapsto & x-\frac{\pi}{4} & \mapsto & \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & \mapsto & \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1, \end{array}$$
puis
$$\begin{array}{ccccc}]0;2] & \xrightarrow{h_4} &]-\infty;\ln(2)] & \xrightarrow{h_5} & [0;4] \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1 & \mapsto & \ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right) & \mapsto & h(x). \end{array}$$

Solution de l'exercice 4 - *Enoncé*. Soit $f : x\mapsto |x-1|+2|x+2|$. On a le tableau suivant

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$		1-x		1-x	0	x-1	
$\lvert x+2\rvert$		-x-2	0	x+2		x+2	
$f(x)$		-3x-3		x+5		3x+3	

On obtient donc le graphe suivant :



Solution de l'exercice 5 - *Enoncé*.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 2$. Donc on obtient le graphe de la fonction f à partir de celui de la fonction carrée par les transformations suivantes : translation de vecteur $-\frac{3}{2}\overrightarrow{i}$, dilatation verticale de rapport 4 puis translation de vecteur $-2\overrightarrow{j}$.

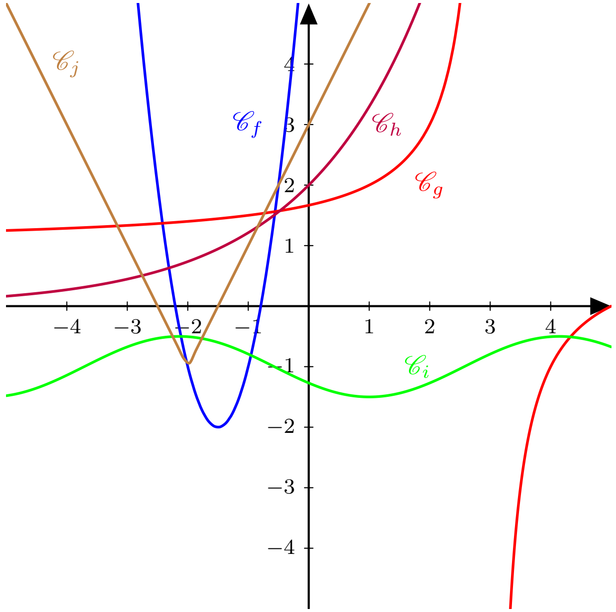
2. On obtient le graphe de la fonction g à partir de celui de la fonction inverse par les transformations suivantes : translation de vecteur $3\overrightarrow{i}$, dilatation verticale de rapport 2 et symétrie axiale d'axe (Ox) puis translation verticale de vecteur $\overrightarrow{j}$.

3. On obtient le graphe de la fonction h à partir de celui de la fonction exponentielle par une dilatation horizontale de facteur 2 et une dilatation verticale de facteur 2.

4. On obtient le graphe de la fonction i à partir de celui de la fonction cosinus par une translation de vecteur $\overrightarrow{i}$, une dilatation verticale de rapport 2, d'une symétrie axiale d'axe (Ox) puis d'une translation de vecteur $-\overrightarrow{j}$.

5. On obtient le graphe de la fonction j à partir de celui de la fonction valeur absolue par une translation de vecteur $-2\overrightarrow{i}$, une dilatation verticale de rapport 2 puis d'une translation de vecteur $-\overrightarrow{j}$.

On obtient donc les graphes suivants :



Solution de l'exercice 6 - *Enoncé*.

1. paire
2. paire
3. paire
4. paire
5. impaire
6. paire
7. impaire
8. paire

Solution de l'exercice 7 - *Enoncé*. Les solutions sont les fonctions constantes. Utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kT \leqslant x < (k+1)T$ (en prenant $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$).

Solution de l'exercice 8 - *Enoncé*. Procéder par l'absurde : composer $x < y$ par $f \circ f \circ f$ et $f(x) \leqslant f(y)$ par $f \circ f$.

Solution de l'exercice 9 - *Enoncé*. Pour chaque fonction f_i on notera $\mathscr{D}_i'$ son ensemble de dérivabilité.

1. $\mathscr{D}_1' = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = -6\sin(x)\cos^5(x)$.
2. $\mathscr{D}_2' =]1; +\infty[$ et $\forall x \in \mathscr{D}_2',\ f_2'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$.
3. $\mathscr{D}_3' = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathscr{D}_3',\ f_3'(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}$.
4. $\mathscr{D}_4' = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathscr{D}_4',\ f_4'(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$.

5. $\mathscr{D}_5' = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathscr{D}_5'$, $f_5'(x) = \frac{1-2x-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^{5/2}}$.
6. $\mathscr{D}_6' = \mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathscr{D}_6'$, $f_6'(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
7. $\mathscr{D}_7' =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ et $\forall x \in \mathscr{D}_7'$, $f_7'(x) = -\frac{2}{(x+2)x}\cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$.
8. $\mathscr{D}_8' = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathscr{D}_8'$, $f_8'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

Solution de l'exercice 10 - *Enoncé*. En 0 les tangentes ont pour équation $\mathcal{T}_\lambda$: $y = x + \lambda$, elles ont le même coefficient directeur 1 donc sont parallèles mais ont une ordonnée à l'origine λ différente pour chaque λ.
En 1 les tangentes ont pour équation $\mathcal{T}_\lambda$: $y = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2}$ et sont concourantes au point $I\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Solution de l'exercice 11 - *Enoncé*. Oui, par le théorème de la bijection.

Solution de l'exercice 12 - *Enoncé*.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ soit $\mathcal{S}_\lambda$ l'ensemble solution associé. On a
   - Si $\lambda = 0$, $\mathcal{S}_0 = \{0\}$.
   - Si $\lambda [-1; 0[\cup]0; 1]$, on a $\mathcal{S}_\lambda = \left\{\frac{1\pm\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right\}$.
   - Si $\lambda \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, on a $\mathcal{S}_\lambda = \emptyset$.
2. Par la question précédente, si $\lambda = 2$ par exemple alors l'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution donc f n'est pas surjective. On a $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.
3. Pour $\lambda = 1/2$ par exemple, on a $\frac{1\pm\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} = 2 \pm \sqrt{3}$ donc $f\left(2-\sqrt{3}\right) = f\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$ et donc f n'est pas injective.
4. Montrer que la solution $x_\lambda^+ = \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$ n'est jamais dans $[-1; 1]$ tandis que $x_\lambda^- = \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$ l'est toujours.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f_\lambda'(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ qui est bien strictement positif sur $]-1; 1[$. On conclut par le théorème de la bijection (on n'oublie pas l'hypothèse de continuité).

Solution de l'exercice 13 - *Enoncé*.

1. La fonction f est bijective et $f^{-1} :]0; +\infty[\to]1; +\infty[$, $y \mapsto \frac{y+1}{y}$.
2. La fonction f est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-1; 1[$, $y \mapsto \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$
3. La fonction f est bijective et $f^{-1} : [0; +\infty[\to [1; +\infty[$, $y \mapsto \mathrm{e}^{y^2}$.
4. La fonction f n'est pas injective car $f(0) = f(1)$, ni surjective car tout $y < -\frac{1}{4}$ n'admet aucun antécédent.
5. La fonction f (aussi appelée sh) est bijective et f^{-1} (aussi appelée argsh) : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ (poser $X = \mathrm{e}^x$ pour résoudre l'équation $y = f(x)$).
6. La fonction f est injective mais n'est pas surjective car tout $y \in]-\infty; -1[\cup [1; +\infty[$ n'admet aucun antécédent.

Solution de l'exercice 14 - *Enoncé*.

1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ puis l'on applique le théorème de la bijection, on obtient $J =]1; +\infty[$.
2. Pour tout $y \in J$, $f^{-1}(y) = \left(\sqrt{y} - 1\right)^2$.

Solution de l'exercice 15 - *Enoncé*.

1. La fonction a une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
2. La fonction a une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. La fonction a une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$. Notez également l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = \frac{9}{4}$.
4. La fonction a une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$ et $+\infty$.
5. La fonction a une asymptote oblique d'équation $y = x$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. La fonction a une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.
7. La fonction a une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
8. La fonction a une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ en $-\infty$ et une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$. Notez également l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.
9. La fonction a une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$ en $+\infty$.
10. La fonction a une branche parabolique de direction asymptotique $y = 2x$ en $+\infty$.

Solution de l'exercice 16 - *Enoncé*. Pour chaque question, on notera f la fonction en question.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - x$. Sa dérivée est dérivable (f est dérivable deux fois) et on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

Le graphe présente une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (1+\ln(x))\,\mathrm{e}^{x\ln(x)}$, on en déduit le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f	$\|$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum en e^{-1} valant $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$. Le graphe présente une tangente horizontale en $x = \mathrm{e}^{-1}$ et une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

3. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

La fonction f admet un maximum en e valant e^{-1}. Le graphe présente une asymptote verticale d'équation $x = 0$, une tangente horizontale en $x = \mathrm{e}$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

4. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. D'où,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$ valant $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$. Le graphe présente une tangente horizontale en $x = -1/2$ et une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]1; 3[\cup]4; +\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = 6\frac{x-2}{x(x-1)(x-3)(x-4)}$. D'où,

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$	//////	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	0

Le graphe présente une tangente horizontale en $x = 2$ des asymptotes verticales d'équation $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ et des asymptotes horizontales d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et $-\infty$.

6. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = x\,(2\ln(x)+1)\,\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}$. D'où,

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f	$\|$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum en $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ valant $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Le graphe présente une tangente horizontale en $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

7. La fonction f est définie sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $]-1; 1[$. La fonction est impaire ! ! ! Etude sur $[0; 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. D'où,

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

La fonction f est bornée sur $[-1; 1]$, admet un minimum en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ valant $-\frac{1}{2}$ et un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ valant $\frac{1}{2}$. Le graphe présente deux tangentes horizontale en $x = -\frac{1}{2}$ et en $x = \frac{1}{2}$.

8. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2\frac{x^3+1}{x^2}$. D'où,

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe présente une tangente horizontale en $x = -1$, une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$ et en $-\infty$.

9. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = x\,(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$. D'où,

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

La fonction f admet un minimum en 0 valant 0. Le graphe présente une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$, une tangente horizontale en $x = 0$ et en $x = 4\,\mathrm{e}^{-2}$ ainsi qu'une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

10. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{2\ln(x)+1}{x^2}$. D'où,

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

La fonction f admet un maximum en $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ valant $2\sqrt{\mathrm{e}}$. Le graphe présente une asymptote verticale d'équation $x = 0$, une tangente horizontale en $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

11. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ cependant n'est pas dérivable a priori en 0. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \frac{1+2x-x^2}{(1-x)^2}$. Dès lors, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum en $1-\sqrt{2}$ valant $2\sqrt{2}-3$. Le graphe présente une asymptote d'équation $y = -x-2$ en $-\infty$ une tangente horizontale en $x = 1-\sqrt{2}$. *Inutile de parler d'asymptote en $+\infty$ car sur $\mathbb{R}_+$, le graphe est **exactement** la droite $y = x$.*

12. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. On note que f est une fonction impaire ! Etude sur $[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$. Pour tout $x > 1$, $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ et $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Pour tout $x \in\,]0;1[$, $f(x) = x + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et $f'(x) = -\frac{x^2+1}{1-x^2}$. On en déduit alors son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ puis sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par imparité :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe présente une direction asymptotique oblique d'équation $y = x$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Solution de l'exercice 17 - *Enoncé*.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0 et on vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
2. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (que l'on peut obtenir directement par imparité) donc le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.
3. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

4. On applique le théorème de la bijection grâce notamment à la continuité de f.

5. On a $\mathrm{e}^x = \frac{u+v}{2}$ et $1 = \frac{v-u}{2}$ on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-f(x)^2}{2}$.

6. Par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $y \in]-1;1[$, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{2}{1-f(y)} = \frac{2}{1-y^2}$.

7. On décompose la fraction comme suit : pour tout $y \in]-1;1[$, $\frac{2}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$. Par primitivation, pour tout $y \in]-1;1[$, $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ (on n'oublie pas de justifier la valeur de la constante de primitivation).

8. On pose $X = \mathrm{e}^x$. On résout l'équation $y = \frac{X-1}{X+1}$ et on retrouve bien que $x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Solution de l'exercice 18 - *Enoncé*.

On applique le théorème de la bijection, toujours avec l'hypothèse de continuité. Son ensemble image est $[1;+\infty[$.

On a pour tout $x \geqslant 2$, $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}$. Donc f' s'annule en 2 donc f a une tangente horizontale en $x=2$ et par symétrie par rapport à $y=x$, g a une tangente verticale en $x=1$. On applique le théorème de la dérivée de la réciproque pour montrer que g est dérivable sur $]1;+\infty[$. En utilisant que $f'(x) = \frac{x-2}{f(x)}$ on a pour tout $y \in]1;+\infty[$, $g'(y) = \frac{y}{g(y)-2}$.

On primitive la relation précédente et l'on trouve la constante d'intégration grâce à $y=1$ par exemple : $g^2(y) - 4g(y) - y^2 + 5 = 0$. Par le discriminant, le fait que $y \geqslant 1$ et $g(y) \geqslant 2$, on obtient $g(y) = 2 + \sqrt{y^2-1}$.

On pose $y = f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$ en élevant au carré, $x^2 - 4x + 5 - y^2 = 0$ et on procède comme au-dessus pour obtenir $x = 2 + \sqrt{y^2-1}$.

Solution de l'exercice 19 - *Enoncé*. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$. On observe que f est 2π-périodique. Etude donc sur $[0;2\pi]$. On note également que $f(x-\pi) = -f(x)$. Donc on étudie f sur $[0;\pi]$. On obtiendra ensuite le graphe de f sur $[-\pi;0]$ par la composée d'une translation horizontale de vecteur $-\pi\overrightarrow{i}$ et de la symétrie axiale d'axe (Ox). Par des formules trigonométriques, on a pour tout $x \in [0;\pi]$, $f'(x) = \frac{5}{2}\sin(2x)\left[\sin^3(x) - \cos^3(x)\right]$. On obtient donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\sin(2x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$\sin^3(x) - \cos^3(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
f	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	↗	1	↘	0	↘	-1

Puis on en déduit directement :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0
f	-1	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	-1	↗	0	↗	1