TD4
Nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes

Exercice 1 Calculer

1. $z_1 = (6+3i)(4-2i)$
2. $z_2 = \frac{7+3i}{3-7i}$
3. $z_3 = (1+i)^3$

Exercice 2 Donner la forme algébrique de $(1+i)^{125}$ puis de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$.

Exercice 3 Donner une caractérisation simple sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le complexe $Z = 1+iz$ soit réel.

Exercice 4 Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z = z^2+z+1$ soit réel.

Forme trigonométrique

Exercice 5 Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants.

1. $z_1 = 3+3i$
2. $z_2 = -1-\sqrt{3}i$
3. $z_3 = -\frac{4}{3}i$
4. $z_4 = -2$
5. $z_5 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$
6. $z_6 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$
7. $z_7 = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{2i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$, on définit $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $\mathbb{U}$ est stable par f, c'est-à-dire que $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Exercice 7

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $z \in \mathbb{U}$. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Exercice 9 Déterminer la forme polaire de $1+i$, $1-i$ et $\sqrt{3}+i$. En déduire une expression simplifier des complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{(1-i)^5}{(i+1)^4}$
2. $z_2 = (1+i)^{30}$
3. $z_3 = \left((1-i)^2\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^{24}$

Exercice 10 On pose $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_3 puis sa forme polaire.
2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11 Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant des formules trigonométriques. En déduire une expression simple de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8.$$

Exercice 12

1. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Simplifier $\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. Déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 13 Soit $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Simplifier $\frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{-i\theta}}$.

Exercice 14 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes.

1. $\cos^4(x)$
2. $\sin^5(x)$
3. $\sin^2(x)\cos^3(x)$
4. $\cos(x)\cos^2(2x)$

Exercice 15 Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et de leurs puissances les nombres suivants :

1. $\sin(3x)$
2. $\sin(5x)$
3. $\cos(6x)$

Exercice 16 Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les modules de z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ soient égaux.

Exercice 17 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \cos(a) + \cos(a+b) + \cdots + \cos(a+nb)$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) = \sin(a) + \sin(a+b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

1. Calculer C et S lorsque $b \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose maintenant que $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$C + iS = \mathrm{e}^{i\left(\frac{nb}{2}+a\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

et en déduire C et S.