# TD5
# Calcul algébrique

## La somme $\sum$ et le produit $\prod$

**Exercice 1** Calculer la somme des $n$ premiers entiers impairs.

**Exercice 2** Calculer la somme $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n$.

**Exercice 3** Calculer la somme $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n\,(n+1)\,(n+2)$.

**Exercice 4** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$.

**Exercice 5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^3$
2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
3. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$
4. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$
5. $S = \sum\limits_{k=9}^{29} \frac{k-2}{3}$
6. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
7. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \times k!$
8. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(4^k + 3k + 2n\right)$

**Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du changement d'indice $\tilde{k} = n - k$, calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

**Exercice 7** Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} ka^k$.

1. Si $a = 1$, calculer $S_n(1)$.
2. Si $a \neq 1$, à l'aide du changement d'indice $\tilde{k} = k - 1$, calculer $S_n(a)$.
3. On suppose ici que $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En dérivant $x \mapsto T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$, calculer à nouveau $S_n(a)$, pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**Exercice 8** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. A l'aide de l'exponentielle complexe, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 0$.
2. A l'aide d'un changement d'indice, retrouver le résultat précédent.

## Coefficient binomial et formule du binôme de Newton

**Exercice 9** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. A l'aide de leur somme et de leur différence, calculer $A_n$ et $B_n$.

**Exercice 10** Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1+x)^n$, ainsi que ses dérivées et/ou primitives, (re)trouver les valeurs des sommes suivantes.

1. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$
4. $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

**Exercice 11** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb)$.

## Sommes doubles

**Exercice 12** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$
2. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$
3. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i^2$
4. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j^2$
5. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$
6. $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$
7. $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$
8. $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$
9. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$
10. $\sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{i}{j}$
11. $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$
12. $\sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$

**Exercice 13** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^j$.

1. En choisissant soigneusement l'ordre de sommation, montrer que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Montrer également que l'on a $S_n = \sum\limits_{j=0}^{n} (j+1)\,2^j$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\sum\limits_{j=1}^{n} j2^{j-1} = (n-1)\,2^n + 1$.
4. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme double $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i+1} j2^{j-1}$.