TD6
Fonctions usuelles

Les fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 1 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant le système d'équations.

1. $\begin{cases} x+y=25 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(100) \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(60) \end{cases}$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.

Les fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des réels $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^2$ tels que

1. $\begin{cases} 4\left(\log_x(y)+\log_y(x)\right)=17 \\ xy=243 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 7\left(\log_x(y)+\log_y(x)\right)=50 \\ xy=256 \end{cases}$

Exercice 4 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\log_a(x)\log_{a^2}(x)$ en fonction de $\log_a(x)$.
2. Résoudre l'équation $\log_3(x)\log_9(x)=2$.

Les fonctions puissances

Exercice 5 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ et $v(x)=\frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$. Simplifier $u(x)^{v(x)}$.

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x\ln(x)+\mathrm{e}^x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+2}{\mathrm{e}^x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+2}{x^{10}+5}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x\cos(x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x)}{1-x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x-\ln^2(x)}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}+x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes :

1. $5^{3x}=7$
2. $2^{x^3}=3^{x^2}$
3. $2^x+\frac{6}{2^x}=5$
4. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$
5. $e^x+e^{1-x}=e+1$
6. $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$

Exercice 9 Montrer que $\forall x \in]0,1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Les fonctions hyperboliques

Exercice 10 Simplifier $A(x)=\frac{\mathrm{ch}(\ln(x))+\mathrm{sh}(\ln(x))}{x}$.

Exercice 11 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des réels x solutions de l'équation.

1. $\mathrm{ch}(x)=2$
2. $5\,\mathrm{ch}(x)-4\,\mathrm{sh}(x)=3$

Exercice 12

1. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{sh}(x) \geqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1+\frac{x^2}{2}$.

Exercice 13 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n=\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\,(a+kb) \qquad \text{et} \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}\,(a+kb).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer C_n+S_n et C_n-S_n.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs de C_n et de S_n.

Exercice 14 Soit $a \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $\mathrm{sh}(a)+\mathrm{sh}(a+x)+\mathrm{sh}(a+2x)+\mathrm{sh}(a+3x)=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 On pose $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. Simplifier l'expression $y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right)$.

Exercice 16 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un calcul de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$$

Les fonctions circulaires réciproques

Exercice 17 Calculer les nombres suivants.

1. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
4. $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)$
5. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$
6. $\arctan(-1)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$
8. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
9. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$
10. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right)$
11. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-47\pi}{8}\right)\right)$
12. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

Exercice 18 Donner le domaine de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

1. $\cos(2\arccos(x))$
2. $\cos(2\arcsin(x))$
3. $\sin(\arccos(x))$
4. $\sin(2\arctan(x))$
5. $\tan(2\arcsin(x))$

Exercice 19 Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Exprimer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ sous la forme $\arctan(u)$, avec $u \in \mathbb{R}$ à déterminer.
3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right).$$

Exercice 20 Soient $p > 0$ et $q > 0$ deux entiers. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de la fonction tangente.

1. Montrer que $\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + \arctan\left(\frac{q-p}{q+p}\right) \in \mathscr{D}$
2. Calculer $\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + \arctan\left(\frac{q-p}{q+p}\right)$.
3. Ecrire $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ sous forme $\arctan(u)$, où u est un réel à déterminer.
4. Déduire des questions précédentes la formule $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 21 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des réels x solutions.

1. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$
2. $\arcsin(\tan(x)) = x$
3. $\arccos(x) = \arcsin(2x)$
4. $\arctan(x) + \arctan\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$
5. $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x)$
6. $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = \arctan(x)$

Exercice 22 Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.
2. $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$
3. $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$
4. $\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$
5. $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$
6. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Exercice 23 Résoudre l'équation $2^{\sin^2(x)} = \cos(x)$.

Exercice 24 Etudier la fonction suivante :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan x.$$

Exercice 25 Etudier puis simplifier les expressions suivantes :

1. $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.
2. $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$
3. $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$
4. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$
5. $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
6. $f(x) = \arctan \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
7. $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$

Exercice 26 Etudier les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan 2x^2$.
2. $f : x \mapsto \arcsin \sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}$.
3. $f : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$.
4. $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.
5. $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6}\arccos(\cos(3x))$.