Chapitre XIII : Ensembles et Applications

I Ensembles

Introduction
La construction des mathématiques repose sur des axiomes ou postulats, en nombre restreint, que l'on admet pour ensuite développer une théorie cohérente. Dans la formulation moderne la plus classique, les mathématiques sont construites à partir de la théorie des ensembles et de l'axiomatisation ZFC (Ernest Zermelo et Abraham Fraenkel sont deux mathématiciens et C désigne un axiome appelé axiome du choix). Dans ce cadre, les ensembles sont des notions primaires que l'on ne définit pas.
On postule donc

- la notion d'ensemble (*une collection d'objet*)
- la notion d'appartenance (*être dedans ou ne pas y être*)
- la notion d'ensemble vide $\emptyset$ (*l'ensemble qui ne contient aucun élément*).

Remarque 1 : On peut définir un ensemble de deux façons.

- En extension : on liste l'ensemble de ses éléments en les mettant entre accolades. Exemple : l'ensemble des entiers pairs :
$$\{\dots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\dots\}.$$
- En compréhension : soient E un ensemble et P un prédicat sur E. On définit alors un ensemble en considérant tous les éléments $x \in E$ pour lesquels $P(x)$ est vraie :
$$\{\, x \in E \mid P(x) \text{ est vraie } \}.$$
Exemple : l'ensemble des entiers pairs est donné par
$$\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est pair. } \}.$$
Autre exemple : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ passant par $(0;0)$:
$$\{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=0 \}.$$

Je vous laisse deviner quelle définition est formellement plus rigoureuse...

I.1 Inclusion

Définition I.1

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B si et seulement si tout élément de A est un élément de B, on note alors $A \subseteq B$ ou encore $A \subset B$. Autrement dit,
$$A \subset B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in A, \quad x \in B.$$

Remarque 2 : On rappelle que $A \subset B$ et $A \subseteq B$ ont exactement la même signification. Pour noter que A est strictement inclus dans B c'est-à-dire

1. A est inclus dans B
2. il existe $b \in B$ tel que $b \notin A$.

alors on écrit $A \subsetneq B$.

Définition I.2

Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont égaux si et seulement si A est inclus dans B et B est inclus dans A :
$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subset B \quad \text{ET} \quad B \subset A.$$

Exemple 3 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$. On pose $A = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^*,\ y = f(x) \}$. Montrer que $A = \mathbb{R}^*$.

Proposition I.3

La relation d'inclusion est :

1. réflexive : $A \subset A$.
2. transitive : $(A \subset B \text{ ET } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.
3. antisymétrique : $(A \subset B \text{ ET } B \subset A) \Rightarrow A = B$.

Définition I.4

Soient A et E deux ensembles.

- Si $A \subset E$, on dit aussi que A est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E.
- **L'ensemble des parties de** E, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E, est noté $\mathscr{P}(E)$.

Exemple 4 :

1. Pour tout ensemble E, on a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
2. Si $E = \{0,1,2\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$.
3. Lorsque $E = \{a\}$ est un **singleton** alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
4. Si $E = [0,1]$, bien que $\mathscr{P}(E)$ existe, il est impossible de le décrire simplement.

I.2 Intersection

Définition I.5

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle **intersection** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ET à B, noté $A \cap B$. Autrement dit,

$$A \cap B = \{\, x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \in B \,\}.$$

Exemple 5 : Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose alors

$$A = \{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) \,\}$$
$$B = \left\{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b \,\right\}.$$

Déterminer $A \cap B$.

Proposition I.6

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. L'intersection de deux ensembles est :

1. Commutative : $A \cap B = B \cap A$.
2. Associative : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. Idempotente : $A \cap A = A$.
4. L'ensemble vide est absorbant : on a $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Définition I.7

Soit E un ensemble. Deux parties A et B de E sont dites **disjointes** si $A \cap B = \emptyset$.

I.3 Réunion

Définition I.8

Soient E un ensemble et A et B deux parties E. On appelle **réunion** ou **union** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A OU à B, noté $A \cup B$. Autrement dit,

$$A \cup B = \{\, x \in E \mid x \in A \ \text{ OU } \ x \in B \,\}.$$

Remarque 6 : Lorsque A et B sont disjoints, l'union $A \cup B$ est dite union disjointe et est notée $A \cup B = A \sqcup B$.

Exemple 7 : On note $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$A = \{ f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0;1],\ f(x) > 0 \}$$
$$B = \{ f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0;1],\ f(x) < 0 \}$$
$$C = \{ f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0;1],\ f(x) \neq 0 \}.$$

Démontrer que $A \cup B = C$.

Proposition I.9

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensemble de E. La réunion de deux ensembles est :

1. Commutative : $A \cup B = B \cup A$.
2. Associative : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
3. Idempotente : $A \cup A = A$.
4. L'ensemble vide est neutre pour l'union : $A \cup \emptyset = A$.

I.4 Complémentaire et différence de deux ensembles

Définition I.10

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, noté $E \setminus A$. Autrement dit,

$$E \setminus A = \{ x \in E \mid x \notin A \}.$$

L'ensemble $E \setminus A$ est souvent également noté, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E, simplement $\bar{A}$ ou A^c.

Proposition I.11

Soit E un ensemble et A une partie de E, alors $E \setminus (E \setminus A) = A$ ou encore $\overline{(\overline{A})} = A$ i.e. $(A^c)^c = A$.

Exemple 8 : Si $E = \mathbb{N}$ et $A = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Alors $\overline{A} = 2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

Proposition I.12

Soient E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E. On a les propriétés suivantes.

1. Si $A \subset B$ alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Loi de Morgan :
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Remarque 9 : Rien de neuf sous le soleil, la loi de Morgan vue en début d'année est toujours la loi de Morgan... Sauf que cette fois-ci, A et B ne sont plus des assertions mais des ensembles et les connecteurs logiques sont remplacés par des opérateurs sur les ensembles.

Définition I.13

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle **différence** de A par B l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B, noté $A \setminus B$. Autrement dit,

$$A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A \ \text{ ET } \ x \notin B \} = A \cap C_E(B)$$

Remarque 10 : Attention, il ne s'agit pas du complémentaire de B dans A sauf si $B \subset A$.

Proposition I.14

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B.$$

I.5 Recouvrement disjoint, partition

Définition I.15

Soient E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie de E, $n \in \mathbb{N}$, $(B_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille de parties de E. On dit que $(B_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est **un recouvrement disjoint** de A si et seulement si

- les ensembles B_i sont disjoints deux à deux :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!],\ i \neq j, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset.$$

- l'union des B_i recouvre A :

$$A \subseteq \bigsqcup_{i\in I} B_i.$$

Définition I.16

Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}$, $(B_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille de parties de E. On dit que $(B_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est **une partition** de E si et seulement si

- les ensembles B_i sont disjoints deux à deux :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!],\ i \neq j, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset.$$

- l'union des B_i est égale à E :

$$\bigsqcup_{i\in I} B_i = E.$$

I.6 Produit cartésien d'ensembles

Définition I.17

- Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$ l'ensemble des couples d'éléments où la première coordonnée appartient à E et la seconde à F. Autrement dit,

$$E \times F = \{ (x,y) \mid x \in E \ \text{ ET } \ y \in F \}.$$

- *(Généralisation)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles. On appelle **produit cartésien** des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble défini par

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \in E_i \}.$$

  On appelle **n-uplet** tout élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Remarque 11 :

- Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $E_i = E$ alors on note $E \times E \times \cdots \times E = E^n$.
- Attention un n-uplet est toujours ordonné. Par exemple les couples $(1,3)$ et $(3,1)$ sont distincts (pensez aux coordonnées d'un point du plan) tandis que les ensembles $\{1,3\}$ et $\{3,1\}$ sont égaux.

Exemple 12 : Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ou même $\mathbb{R}^n$ sont des produits cartésiens de l'ensemble $\mathbb{R}$.

II Applications

II.1 Définition

Définition II.1

Soit E et F deux ensembles. Une application $f : E \to F$ de E dans F met tout élément x de E en relation avec un unique élément y de F, noté $y = f(x)$.

- On dit que E est l'ensemble de départ.
- On dit que F est l'ensemble d'arrivée.
- On dit que y est **l'image** de x par f.
- On dit que x est **un antécédent** de y par f.

Rigoureusement, pour définir une application, on considère Γ un sous-ensemble de $E\times F$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y, y') \in E \times F \times F, \qquad \left.\begin{array}{l}(x,y) \in \Gamma \\ (x,y') \in \Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow y = y'.$$

La fonction définie à partir de Γ associe pour tout couple de Γ, la première coordonnée à la seconde. En d'autres termes, on commence par définir le graphe de f avant de définir f. Ici nous faisons l'inverse.

Définition II.2

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E dans F. **Le graphe de** f est le sous-ensemble de $E \times F$ défini par

$$\mathscr{G}(f) = \{\,(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\,\} = \{\,(x, f(x)) \mid x \in E\,\}\,.$$

Remarque 13 : Rigoureusement le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ n'est qu'une représentation dans le plan.

Définition II.3

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

II.2 Applications particulières

Définition II.4

Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E, l'application définie par

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_E : E &\to E\\ x &\mapsto x.\end{aligned}$$

Définition II.5

Soient E un ensemble et A un sous ensemble de E. On appelle **fonction indicatrice de** A l'application définie sur E par

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A : E &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases}1 \text{ si } x \in A\\ 0 \text{ si } x \notin A.\end{cases}\end{aligned}$$

Proposition II.6

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a

1. $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$
2. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
4. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
5. $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Supposons que $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$. Montrons que $A \subseteq B$. Soit $x \in A$. Alors, $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Donc par hypothèse, $\mathbb{1}_B(x) \geqslant \mathbb{1}_A(x) = 1$. Or $\mathbb{1}_B(x) \leqslant 1$. Donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ i.e. $x \in B$. Ainsi, $A \subseteq B$.
   ($\Leftarrow$) Supposons que $A \subseteq B$. Soit $x \in E$. Premier cas, si $x \in A$. Alors, $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et donc on a bien $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
   Second cas, $x \notin A$. Alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Or $\mathbb{1}_B(x) \in \{0;1\}$ donc $\mathbb{1}_B(x) \geqslant 0 = \mathbb{1}_A(x)$.
   Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ et donc $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.
   Conclusion, $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$.
2. A l'aide du point précédent, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \text{ ET } \mathbb{1}_A \geqslant \mathbb{1}_B \\ & \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ ET } B \subseteq A \\ & \Leftrightarrow \quad A = B. \end{aligned}$$
3. Soit $x \in E$. Premier cas, $x \in A \cup B$. Premier sous-cas, $x \in A \setminus B$. Alors,
$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_B(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1.$$
   Par conséquent,
$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x).$$
   Deuxième sous-cas, $x \in B \setminus A$. Par symétrie des hypothèses sur A et B comme pour le point précédent, $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$.
   Troisième sous-cas, $x \in A \cap B$. Alors,
$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_B(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1.$$
   Donc
$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x).$$
   Enfin, second cas $x \notin A \cup B$, alors
$$\mathbb{1}_A(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_B(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0.$$
   Donc
$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x).$$
   Conclusion, dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
4. Soit $x \in E$. Premier cas, $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$. Donc $\mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cap B}$.
   Deuxième cas, $x \notin A \cap B$. Alors $x \notin A$ ou $x \notin B$. Donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$ et donc $\mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}$.
   Conclusion, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
5. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - 1 = 0 = \mathbb{1}_{\bar{A}}(x)$. Si $x \notin A$, alors, $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_{\bar{A}}(x)$. Conclusion, $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

$\square$

II.3 Composition, restriction

Définition II.7

Soient E, F et G trois ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$ deux applications. L'application composée de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G définie par
$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Remarque 14 :

- Si $f \in \mathscr{F}(E, F)$ alors $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.
- La composition n'est possible que si l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Proposition II.8

La composition est associative : soient E, F, G et H des ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$, $h \in \mathscr{F}(G,H)$ alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Définition II.9

Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$. Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(A,F)$.

1. On appelle **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par :

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\to F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

2. On appelle prolongement de l'application g toute application $h \in \mathscr{F}(E,F)$ telle que $g = h_{|A}$.

II.4 Image directe, image réciproque

On commence par rappeler la définition d'un ensemble image et de l'image réciproque à laquelle on donne la notation plus standard.

Définition II.10

Soient E, F deux ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$ et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.

- On appelle **image directe** de A par f le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \,\} = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}.$$

- On appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\}.$$

Remarque 15 :

- On rappelle que la notation $f^{-1}(B)$ n'implique pas que f est bijective. La définition de l'image réciproque est valable pour toute application, bijective ou non.
- Lorsque $A = E$, on note $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'ensemble de toutes les images de f.
- Si f est bijective alors $f^{-1}(B)$ est l'image directe de B par f^{-1} et $f(A)$ est l'image réciproque de A par f^{-1}.

Proposition II.11

Soient E, F deux ensembles, A, B deux parties de F et f une application de E dans F. On a les propriétés suivantes.

1. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{(f^{-1}(B))}$.

Démonstration.

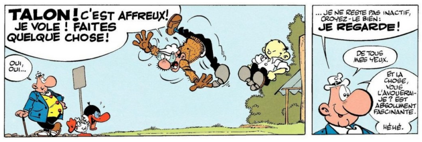
1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$ telles que $A \subseteq B$. Soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition, $f(x) \in A$. Or $A \subseteq B$. Donc $f(x) \in B$, i.e. $x \in f^{-1}(B)$. On a donc démontré que tout élément de $f^{-1}(A)$ est un élément de $f^{-1}(B)$ et donc $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Conclusion $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cup B \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ OU } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ OU } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Par conséquent, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

3. On procède de même que dans le point précédent. Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$



Par conséquent, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

4. Soit $F \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{(f^{-1}(B))}$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\overline{B}) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \notin B \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overline{(f^{-1}(B))}. \end{aligned}$$

Conclusion $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{(f^{-1}(B))}$.

□

Proposition II.12

Soient E, F deux ensembles, A, B deux parties de E et f une application de E dans F. On a les propriétés suivantes.

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. On ne peut rien dire concernant le complémentaire.

Démonstration.

1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ telles que $A \subseteq B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. On a alors par définition qu'il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subseteq B$. Donc $x \in B$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(B)$. Donc tout élément de $f(A)$ est un élément de $f(B)$. Donc $f(A) \subseteq f(B)$. Conclusion, $f(A) \subset f(B)$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in E$. On a

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ &\overset{(!)}{\Leftrightarrow} (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Conclusion $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
Attention !!! Ce raisonnement est faux si l'on remplace l'union par l'intersection ! En effet le sens réciproque de (!) est faux pour l'intersection et le connecteur ET . C'est subtil mais il faut comprendre que s'il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$ et s'il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$, comme x_1 n'est pas forcément égal à x_2, il est possible que $x_1 \in A \setminus B$ et que $x_2 \in B \setminus A$. Alors rien ne nous permet de dire qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Donc y est l'image d'un élément de A (l'élément x) et y est l'image d'un élément de B (le même, l'élément x). Par conséquent, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. Finalement, on a montré que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

□

Remarque 16 :

- Tout se passe bien avec f^{-1} et tout est bon avec l'union.
- Ce n'est pas le cas avec l'image directe de l'intersection ou l'on n'a pas toujours égalité.
  Si $f : x \mapsto x^2$, vérifiez que l'inclusion est stricte pour $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$.

Proposition II.13

Soient E, F deux ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$ et $f : E \to F$. On a les propriétés suivantes.

1. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
2. $A \subset f^{-1}(f(A))$

Démonstration.

1. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in f^{-1}(B)$, par conséquent, $f(x) \in B$. Or $y = f(x)$. Donc $y \in B$. Nous avons donc bien montré que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Posons $y = f(x)$ et $B = f(A)$. On a x qui est un antécédent de $y \in B$. Donc par définition, $x \in f^{-1}(B)$ i.e. $x \in f^{-1}(f(A))$. Par conséquent $A \subset f^{-1}(f(A))$.

$\square$

Remarque 17 : En général on n'a pas $f(f^{-1}(B)) = B$ ou $f^{-1}(f(A)) = A$.
Exemple : si $f : x \mapsto x^2$ et $B = \mathbb{R}$, alors $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right) = \mathbb{R}_+$ et si $A = \mathbb{R}_+$, alors $f^{-1}(f(\mathbb{R}_+)) = \mathbb{R}$.

II.5 Injection, surjection et bijection

On rappelle les définitions suivantes.

Définition II.14

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

- On dit que f est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E :
$$\forall (x, x') \in E^2, \qquad (f(x) = f(x')) \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$
- On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$
- On dit que f est bijective si tout élément de F admet exactement un antécédent par f dans E :
$$\forall y \in F,\ \exists ! x \in E,\ y = f(x).$$
  On note alors $f^{-1} : F \to E$ l'application qui a tout élément de F associe son unique antécédent dans E par f.

Remarque 18 : Si f est bijective, l'application f^{-1} est aussi une bijection mais de F dans E.

Proposition II.15

1. La composée de deux applications injectives est injective.
2. La composée de deux applications surjectives est surjective.
3. La composée de deux applications bijectives est bijective.

Proposition II.16

Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application f est bijective.
2. Il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Remarque 19 : Attention si l'on a juste $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ ou juste $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on ne peut pas conclure. Exemple : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ et pourtant f n'est pas injective et g n'est pas surjective.

Proposition II.17

Soient E, F deux ensembles, $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, E)$.

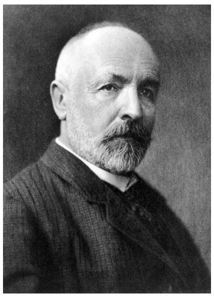
1. Si $f \circ g$ injective alors g est injective.
2. Si $f \circ g$ surjective alors f est surjective.

Proposition II.18

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Remarque 20 : Notez la ressemblance avec les matrices, ce n'est pas une coïncidence...



CANTOR Georg *(Saint-Pétersbourg 1845 - Halle 1918) fut un mathématicien allemand. Il étudia à Zurich puis Berlin et suivit notamment les cours de Weierstrass, Kummer et Kronecker. Il compléta sa formation par des études de physique et de philosophie. Il soutint sa thèse en 1867 (en latin) et fut professeur à l'université de Halle de 1869 à 1905. A partir de 1899, Cantor souffrit de dépressions nerveuses de plus en plus importantes et ses séjours à l'hôpital psychiatrique de Nervenklinik marqua la fin sa période créatrice.*

Dans le cadre des ses recherches, Cantor s'intéressa à donner une définition rigoureuse de l'ensemble des nombres réels, ce qu'il fit presque simultanément avec trois autres mathématiciens : Weierstrass, Méray et Dedekind. Il démontra que l'ensemble des nombres rationnels (et même algébriques) étaient en bijection avec les nombres entiers mais que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'admettait aucune bijection avec $\mathbb{N}$: il y a donc plusieurs infinis ! Il pensait que $\mathbb{R}^n$ était encore plus grand et n'était pas en bijection avec $\mathbb{R}$ mais démontra, à son grand étonnement, le contraire ! Il écrivit à Dedekind « Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : Je le vois mais ne le crois pas*. *» (*en français dans le texte). Il démontra que les ensembles dénombrables (en bijection avec $\mathbb{N}$) sont les ensembles infinis les plus petits. Il conjectura qu'il n'existait aucun ensemble de « taille » intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. La réponse à cette conjecture ne viendra qu'en 1940 lorsque Gödel démontra que cette proposition était en réalité indécidable (ni la proposition, ni sa négation ne sont démontrables !).*
Les idées de Cantor, conceptuellement très novatrices furent très critiquées notamment par Kronecker mais aussi Poincaré, Klein et Weyl. Au contraire, d'autres mathématiciens s'emparent de cette théorie, comme Hurwitz ou Hadamard, théorie qui sera consolidée notamment par Russel, Hilbert et Zermelo. Hilbert écrira : « Nous voulons examiner soigneusement les conceptualisations et les types d'inférence féconds de la théorie des ensembles et, partout où c'est possible avec une chance de réussite, les étayer ou les rendre utilisables. Car il ne faut pas qu'on nous chasse du paradis que Cantor a créé pour nous. »
L'oeuvre de Cantor, en collaboration avec Dedekind, imprègne toutes les mathématiques d'aujourd'hui où les raisonnements ensemblistes sont omniprésents. Comme l'affirma Gödel : « Les paradoxes posent un problème sérieux, non pas aux mathématiques, mais pour la logique et pour l'épistémologie »

Un mathématicien, un physicien et un ingénieur débattent sur la plus grande invention ou découverte de l'Homme. Le mathématicien sans hésiter choisit l'alphabet et la puissance des symboles qu'il a apporté à l'esprit humain. Le physicien rétorque que la maitrise du feu fut bien plus importante. C'est une parfaite illustration que la maitrise de la matière permit des progrès considérables. C'est au tour de l'ingénieur de s'exprimer :
« -Moi je choisis la bouteille thermos.
-Pourquoi la bouteille thermos ? s'étonnent les deux autres
-Parce que le thermos garde les liquides au chaud en hiver et au frais en été.
-Oui, et alors ?
-Réfléchissez ! s'exclame avec enthousiasme l'ingénieur. Cette petite bouteille... Comment elle sait en quelle saison nous sommes ? ! »