Chapitre XXVI : Géométrie du plan

Dans tout ce chapitre $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ désigne l'ensemble des **vecteurs** du plan. C'est donc une notation pour une interprétation géométrique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la loi interne $+$ et de $\cdot$ la multiplication externe par les scalaires de $\mathbb{R}$. On utilisera donc toutes nos connaissances des espaces vectoriels pour décrire $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.
On note également $\mathscr{P}$ l'ensemble des **points** du plan. Il s'agit à nouveau d'une interprétation géométrique de l'espace affine $\mathbb{R}^2$.
Aparté : soit E un espace vectoriel. On appelle alors espace affine de direction E tout espace qui peut s'écrire $\mathscr{E} = A + E = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in E\}$ où A est un point fixé de $\mathscr{E}$. Notamment si $E = \mathbb{R}^2$ et $A = (0,0)$ on obtient l'espace affine simple $\mathbb{R}^2$.

I Repères cartésiens, repères polaires

Pseudo-rappel

- Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}^2$, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ tel que $\vec{u} = B - A$. On le note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- Pour tout $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, et tout $A \in \mathscr{P}$, il existe un unique point $B \in \mathscr{P}$ tel que $B = A + \vec{u}$.

Remarque 1 :

- Autrement dit pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}^2$, $B = A + \overrightarrow{AB}$.
- En conséquence, pour tout $A \in \mathscr{P}$, on a $\mathscr{P} = A + \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Définition I.1

On appelle **repère** du plan affine $\mathscr{P}$ la donnée d'une base $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et d'un point $O \in \mathscr{P}$. On le note alors $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. O est appelé **l'origine** du repère.

Dessin :

Remarque 2 :

- Une base est l'objet efficace pour décrire l'ensemble des vecteurs d'un espace vectoriel. Un repère est son équivalent pour décrire l'ensemble des points d'un espace affine.
- En particulier si $O = (0;0)$ et si $\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$, on obtient le repère « canonique » pour le plan affine $\mathbb{R}^2$.

Proposition I.2 (coordonnées dans un repère)

Soit $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan affine $\mathscr{P}$. Alors pour tout $M \in \mathscr{P}$, il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Le couple est appelé les **coordonnées** de M dans le repère $\mathscr{R}$. On note alors $M\,(x;y)$.

Démonstration. *Existence.* D'après le pseudo-rappel, $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Donc il existe $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}.$$

Donc toujours selon le pseudo-rappel,

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}.$$

Unicité. Soient $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que si $M = O + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = O + x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$ alors $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$. Or $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base et est donc libre. Conclusion, $(x, y) = (x', y')$. □

Exemple 3 : Si $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $O\,(0; 0) \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{R} = (O; e_1, e_2)$ le repère « canonique » de $\mathscr{P}$. Les coordonnées de $M\,(x; y)$ dans $\mathscr{R}$, dite coordonnées cartésiennes, sont simplement (x, y).

Remarque 4 :

1. Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans une base $\mathscr{B}$, il suffit d'appliquer les formules de changements de bases vues au chapitre sur les représentations matricielles.
2. Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $(A, A') \in \mathscr{P}^2$. On note $\mathscr{R} = \left(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\mathscr{R}' = \left(A'; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ les deux repères associés. Pour tout $M \in \mathscr{P}$, de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, on a
$$M = A + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = A' + \overrightarrow{A'A} + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}.$$
On pose (x', y') les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On a alors,
$$M = A' + (x - x')\,\overrightarrow{i} + (y - y')\,\overrightarrow{j}.$$
Avec ces notations les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}'$ sont donc $(x - x', y - y')$. Moralité : pour changer l'origine d'un repère, il suffit d'effectuer une translation de vecteur $-\overrightarrow{AA'}$.
3. Pour passer d'un repère $\mathscr{R} = \left(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ à un repère $\mathscr{R}' = \left(A'; \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$, il suffit donc de changer de base en considérant le repère $\left(A; \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$ puis de changer son origine.

Exemple 5 : Soient $A\,(2, 1)$, $B\,(5, 12)$ et $C\,(1, 4)$ trois points du plan. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R} = \left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Définition I.3

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ deux vecteurs du plan. On note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, compté positivement si l'on tourne dans le sens trigonométrique pour aller de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ et négativement sinon.

Proposition I.4 (coordonnées polaires)

Soit $\mathscr{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère de $\mathscr{P}$. Pour tout $M \in \mathscr{P} \setminus \{O\}$, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que

$$M = O + r\cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + r\sin(\theta)\,\overrightarrow{j}.$$

Les réels (r, θ) sont appelés alors **les coordonnées polaires** de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Démonstration. Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathscr{R}$. Puisque $M \neq O$, alors $(x, y) \neq (0, 0)$. Donc d'après le chapitre sur les complexes, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ où r est le module de M et θ son argument entre $[0; 2\pi[$. □

Remarque 6 : On a alors comme dans les complexes, $r = OM$ et $\theta = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Dessin :

II Opérations sur les vecteurs

II.1 Le produit scalaire

Définition II.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E, toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ (forme sur E^2) étant

- *bilinéaire* :
  1. Pour tout $x \in E$, $\forall (y, y') \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\langle x|\lambda\, y + \mu y'\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x|y'\rangle .$$
  2. Pour tout $(x, x') \in E^2$, $\forall y \in E$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\langle \lambda\, x + \mu x'|y\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x'|y\rangle .$$
- *symétrique* : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- *positive* : $\forall x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$
- *définie* : $\forall x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Remarque 7 : Vous verrez l'année prochain qu'un espace vectoriel de dimension finie avec un produit scalaire est un espace euclidien et vous étudierez ces espaces.

Proposition II.2

Soit $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, il existe un unique produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ vérifiant

$$\langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 0.$$

De plus le produit scalaire vérifie

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2, \qquad \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = xx' + yy'.$$

Démonstration. *Unicité.* Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire vérifiant

$$\langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 0.$$

Montrons qu'il vérifie alors nécessairement

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2, \qquad \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = xx' + yy',$$

ce qui démontrera l'unicité d'une telle application.
Soit $\forall (\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$. Par définition de $\vec{u}$, on a $\vec{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$. Donc par la linéarité à gauche du produit scalaire, on a

$$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = \langle x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}|\vec{v}\rangle = x \langle\overrightarrow{e_1}|\vec{v}\rangle + y \langle\overrightarrow{e_2}|\vec{v}\rangle .$$

De plus, $\vec{v} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$. Donc par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = x \langle \vec{e_1} | x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} \rangle + y \langle \vec{e_2} | x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} \rangle = xx' \langle \vec{e_1} | \vec{e_1} \rangle + xy' \langle \vec{e_1} | \vec{e_2} \rangle + x'y \langle \vec{e_2} | \vec{e_1} \rangle + yy' \langle \vec{e_2} | \vec{e_2} \rangle .$$

Or par hypothèse, $\langle \vec{e_1} | \vec{e_1} \rangle = \langle \vec{e_2} | \vec{e_2} \rangle = 1$ et $\langle \vec{e_1} | \vec{e_2} \rangle = 0$. Donc

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = xx' + x'y \langle \vec{e_2} | \vec{e_1} \rangle + yy'.$$

De plus, par symétrie, $\langle \vec{e_2} | \vec{e_1} \rangle = \langle \vec{e_1} | \vec{e_2} \rangle = 0$. D'où

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = xx' + yy'.$$

Existence. On vérifie que l'application donnée par $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto xx' + yy'$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive. EXO !

□

Exemple 8 :

1. Montrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)$ et tout $Y = (y_1, \dots, y_n)$ par $\langle X | Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathscr{C}([0;1]) \times \mathscr{C}([0;1]) \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(f, g) \in \mathscr{C}([0;1])^2$ par $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([0;1])$.
3. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R}) \times \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(X, Y) \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})^2$ par $\langle X | Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

Définition II.3

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0.$$

Exemple 9 : Les vecteurs $\vec{e_1} = (1, 0)$ et $\vec{e_2} = (0, 1)$ sont orthogonaux. Les vecteurs $\vec{u}\,(5, -8)$ et $\vec{v}\,(2, 5/4)$ sont orthogonaux.

II.2 La norme euclidienne

Définition II.4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On appelle norme euclidienne de E, notée $\|\cdot\|$ l'application définie par

$$\|\cdot\| \quad : \quad \begin{aligned} E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}. \end{aligned}$$

Remarque 10 : Comme $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire, par définition, l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est positive. Donc pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle \geqslant 0$. Donc la racine carré de $\langle x | x \rangle$ existe bien et $\|\cdot\|$ est bien définie sur E et est notamment positive.

Proposition II.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E. On a les propriétés suivantes

1. *Positivité.* Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$.
2. *Définie/Séparation.* Pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
3. *Pseudo-linéarité.* Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
4. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.
5. *Pythagore* Pour tout $(x, y) \in E^2$, si x et y sont orthogonaux alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration.

1. Cf la remarque précédente.
2. Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$, alors $\sqrt{\langle x|x\rangle} = 0_{\mathbb{R}}$ i.e. $\langle x|x\rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Or $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire et donc cela implique que $x = 0_E$.
3. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} \|\lambda x\| = \sqrt{\langle\lambda x|\lambda x\rangle} &= \sqrt{\lambda \langle x|\lambda x\rangle} && \textit{par linéarité à gauche du produit scalaire} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x|x\rangle} && \textit{par linéarité à droite du produit scalaire} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x|x\rangle} = |\lambda| \, \|x\| \,. \end{aligned}$$
4. Soit $(x, y) \in E^2$. Par bilinéarité du produit scalaire,
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle \,.$$
Par symétrie du produit scalaire, $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$ et donc
$$\|x+y\|^2 = \langle x|x\rangle + 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 \,.$$
5. Découle immédiatement de la définition de l'orthogonalité $\langle x|y\rangle = 0$ et du point précédent !

□

Proposition II.6

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. *Identité du parallélogramme.*
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2}.$$
2. *Identité de polarisation.*
$$\langle x|y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Par la proposition précédente,
$$\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = \frac{\|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2 \,.$$
Procéder de même pour le second point.

□

Proposition II.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a
$$|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \,.$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in E^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la proposition II.5,
$$\|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|ty\rangle + \|ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x|y\rangle + \|y\|^2 t^2.$$
Donc la fonction polynomiale $t \mapsto \|x\|^2 + 2t\langle x|y\rangle + \|y\|^2 t^2$ est toujours positive sur $\mathbb{R}$ (car vaut $\|x+ty\|^2$). Son discriminant est donc négatif :
$$\Delta = (2\langle x|y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4\langle x|y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x|y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 \,.$$
En passant à la racine carrée (et puisque les normes sont positives) on obtient le résultat voulue.

□

Proposition II.8 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \,.$$

Démonstration. Soit $(x,y)\in E^2$, on a

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x|y\rangle+\|y\|^2.$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $2\langle x|y\rangle\leqslant|2\langle x|y\rangle|\leqslant 2\|x\|\,\|y\|$. D'où,

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

En passant à la racine carrée (et parce que les normes sont positives) on obtient le résultat souhaité. □

Proposition II.9

1. Soit $\vec{u}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\vec{\mathscr{P}}$. On a
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}.$$
2. Soit $(A(x_A;y_A),B(x_B;y_B))\in\mathscr{P}^2$. On a
$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Démonstration.

1. Par définition de la norme et la proposition II.2,
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u}|\vec{u}\rangle}=\sqrt{xx+yy}=\sqrt{x^2+y^2}$$
2. Puisque $\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{bmatrix}$, la formule se déduit du point précédent.

□

Remarque 11 : Si $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ sont les coordonnées polaires de M dans le repère « canonique » , alors

$$OM=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}=r.$$

Définition II.10

Soit $\vec{u}\in\vec{\mathscr{P}}$. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur **normé** ou **unitaire** si et seulement si sa norme euclidienne vaut 1 :

$$\|\vec{u}\|=1.$$

II.3 Déterminant

Théorème II.11 (admis)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il existe une unique application, appelée **déterminant**, notée det de $(\mathbb{R}^n)^n=\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{n\text{ fois}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. det est n-linéaire i.e. linéaire par rapport à chaque colonne : pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, et tout $(C_1,\dots,C_n,C_i')\in(\mathbb{R}^n)^{n+1}$, et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,
$$\det(C_1,\dots,\lambda C_i+\mu C_i',\dots,C_n)=\lambda\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)+\mu\det(C_1,\dots,C_i',\dots,C_n)$$
2. det est alternée : pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]$, $i\neq j$, et tout $(C_1,\dots,C_n)\in(\mathbb{R}^n)^n$,
$$\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n)=-\det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)\qquad C_i\leftrightarrow C_j.$$
3. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $\det(\mathscr{C})=1$.

Remarque 12 : A partir de cette définition, on définit le déterminant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice considérée : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$.

Proposition II.12

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \in \vec{\mathscr{P}}$. On a alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \underset{\substack{\uparrow \\ notation}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = ad - bc.$$

Démonstration. Par linéarité par rapport à la première variable,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = \det\left(a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = a\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) + c\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right).$$

De même par linéarité par rapport à la seconde variable,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + ad\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + bc\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + cd\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Or puisque det est alterné, $\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $C_1 \leftrightarrow C_2$. Donc $\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$. De même, $\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$. Enfin, $\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Par conséquent,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = (ad - bc)\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Enfin en posant $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, par définition du déterminant, $\det(\mathscr{C}) = 1$. Finalement, on a bien

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc.$$

□

On rappelle que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$.

Corollaire II.13

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Démonstration. Soient $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ deux vecteurs sont colinéaires. Premier cas, $\vec{u} = \vec{0}$. Alors, $x = y = 0$.

$$\det\left(\vec{0}, \vec{v}\right) = xy' - yx' = 0 - 0 = 0.$$

Second cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$ i.e. $y' = \lambda\, y$ et $x' = \lambda\, x$. Donc

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = \lambda\, xy - \lambda\, yx = 0.$$

Réciproquement, si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$.
Premier cas, $x = 0$, alors $yx' = 0$. Premier sous cas, $y = 0$ et alors $\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Second sous cas, $y \neq 0$ et $x' = 0$. Dans ce cas, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ y' \end{bmatrix} = \frac{y'}{y}\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \lambda\,\vec{u}$ avec $\lambda = \frac{y'}{y}$.
Deuxième cas, $x' = 0$, par symétrie des hypothèses sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on en déduit à nouveau que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Troisième cas, $x \neq 0$ et $x' \neq 0$. Alors $\vec{v} = \frac{x'}{x}\begin{bmatrix} x \\ \frac{xy'}{x'} \end{bmatrix} = \frac{x'}{x}\begin{bmatrix} x \\ \frac{x'y}{x'} \end{bmatrix} = \lambda\,\vec{u}$ avec $\lambda = \frac{x'}{x}$.

□

Définition II.14

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$. On appelle **produit mixte** du plan de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}, \vec{v}]$, le réel $[\vec{u}, \vec{v}] = \det(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition II.15

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orientés dans le sens direct** si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \geqslant 0.$$

Remarque 13 : On admet que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orientés dans le sens direct, alors on passe de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ dans le sens trigonométrique.

Dessin :

III Repères/bases orthonormés directs

Définition III.1

Soient $O \in \mathscr{P}$ et $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

- On dit que $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une **base orthonormée directe** si et seulement si
  1. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont normés, $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$.
  2. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, $\left\langle \vec{i} \middle| \vec{j} \right\rangle = 0$.
  3. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orientés de sens direct, $\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \geqslant 0$.
- On dit que $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un **repère orthonormé direct** si et seulement $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base orthonormée directe.

Proposition III.2

Soit $\mathscr{R}_1 = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$. Le repère $\mathscr{R}_2 = (A; \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé direct si et seulement s'il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j} \end{cases}$$

Dessin :

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $\mathscr{R}_2 = (A; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. Démontrons l'existence du réel θ. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ les coordonnées polaires de $\vec{u}$ dans le repère $\mathscr{R}_1$:

$$\vec{u} = r\cos(\theta)\,\vec{i} + r\sin(\theta)\,\vec{j}.$$

Par hypothèse, $\vec{u}$ est normé donc

$$1 = \|\vec{u}\|^2 = \left\|r\cos(\theta)\,\vec{i}\right\|^2 + 2\left\langle r\cos(\theta)\,\vec{i}\,\middle|\,r\sin(\theta)\,\vec{j}\right\rangle + \left\|r\sin(\theta)\,\vec{j}\right\|^2$$

Donc par la bilinéarité du produit scalaire,

$$1 = r^2\cos^2(\theta)\left\|\vec{i}\right\|^2 + 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\left\langle\vec{i}\,\middle|\,\vec{j}\right\rangle + r^2\sin^2(\theta)\left\|\vec{j}\right\|^2$$

Or $\left\|\vec{i}\right\|^2 = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1$ et $\left\langle\vec{i}\,\middle|\,\vec{j}\right\rangle = 0$ car le repère $\mathscr{R}_1$ est orthonormé. D'où,

$$1 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

$r > 0$, conclusion, $r = 1$ et

$$\vec{u} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}.$$

De même, il existe $\theta' \in [0; 2\pi[$ tel que

$$\vec{v} = \cos(\theta')\,\vec{i} + \sin(\theta')\,\vec{j}.$$

De plus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Donc, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} 0 = \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle &= \cos(\theta)\cos(\theta')\left\langle\vec{i}\,\middle|\,\vec{i}\right\rangle + \cos(\theta)\sin(\theta')\left\langle\vec{i}\,\middle|\,\vec{j}\right\rangle + \sin(\theta)\cos(\theta')\left\langle\vec{j}\,\middle|\,\vec{i}\right\rangle + \sin(\theta)\sin(\theta')\left\langle\vec{j}\,\middle|\,\vec{j}\right\rangle \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta'). \end{aligned}$$

On reconnait une formule de trigonométrie, donc,

$$\cos(\theta' - \theta) = 0.$$

D'autre part, par bilinéarité du déterminant,

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \cos(\theta)\cos(\theta')\det\left(\vec{i}, \vec{i}\right) + \cos(\theta)\sin(\theta')\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \\ &\qquad + \sin(\theta)\cos(\theta')\det\left(\vec{j}, \vec{i}\right) + \sin(\theta)\sin(\theta')\det\left(\vec{j}, \vec{j}\right) \\ &= \left(\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta')\right)\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \\ &= \sin(\theta' - \theta)\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right). \end{aligned}$$

Or par hypothèse $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ sont deux repères directs donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) \geqslant 0$ et $\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \geqslant 0$. Par conséquent, $\sin(\theta' - \theta) \geqslant 0$ et puisque $\cos(\theta' - \theta) = 0$, on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $\theta' - \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Donc

$$\cos(\theta') = -\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta') = \cos(\theta).$$

Et finalement,

$$\vec{v} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}.$$

Réciproquement, en utilisant les propriétés de la norme, du produit scalaire et du déterminant, on vérifie que si $\vec{u} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}$ alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe. □

Remarque 14 : En gardant les notations de la proposition, on observe que

$$\operatorname{mat}_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la matrice de rotation d'angle θ. Rotation qui permet de passer de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$. En l'inversant, on obtient également que

$$\operatorname{mat}_{(\vec{u}, \vec{v})}\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Tout cela est très cohérent car l'on obtient par parité/imparité du cosinus/sinus la matrice de rotation d'angle $-\theta$ qui est bien la rotation pour passer de $(\vec{u}, \vec{v})$ à $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

Proposition III.3

Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \in \vec{\mathscr{P}}$ une base orthonormée du plan et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$ un vecteur. Alors les coordonnées cartésiennes (x, y) de $\vec{u}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ sont données par

$$x = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{i} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad y = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{j} \right\rangle.$$

Démonstration. Par définition, $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Donc

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{u} \middle| \vec{i} \right\rangle &= x \left\langle \vec{i} \middle| \vec{i} \right\rangle + y \left\langle \vec{j} \middle| \vec{i} \right\rangle && \textit{par linéarité} \\ &= x && \textit{car } \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \textit{ est orthonormée.} \end{aligned}$$

De même pour $\left\langle \vec{u} \middle| \vec{j} \right\rangle$.

□

IV Expressions des opérateurs vectoriels

IV.1 En base orthonormée quelconque

Proposition IV.1

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ une base orthonormée de $\vec{\mathscr{P}}$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathscr{P}}$ deux vecteurs du plan et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$ respectivement de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = xx' + yy'$
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. si de plus $\mathscr{B}$ est orientée dans le sens direct : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

Démonstration. Notons $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Supposons $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe. On sait alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{i} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\vec{j} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Donc, par la formule $X = PX'$,

$$\begin{aligned} \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}) &= \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) & x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) & x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De là, on en déduit les calculs qui suivent.

1. Pour le produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle &= (x\cos(\theta) - y\sin(\theta))(x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta)) + (x\sin(\theta) + y\cos(\theta))(x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta)) \\ &= xx'\cos^2(\theta) - (xy' + x'y)\cos(\theta)\sin(\theta) + yy'\sin^2(\theta) \\ &\qquad xx'\sin^2(\theta) + (xy' + x'y)\cos(\theta)\sin(\theta) + yy'\cos^2(\theta) \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

2. Pour la norme, d'après le point précédent,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle} = \sqrt{xx + yy} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Pour le déterminant/produit mixte,

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) & x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) & x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= xy'\cos^2(\theta) + (xx' - yy')\cos(\theta)\sin(\theta) - x'y\sin^2(\theta) \\ &\qquad - \left[x'y\cos^2(\theta) + (xx' - yy')\cos(\theta)\sin(\theta) - xy'\sin^2(\theta)\right] \\ &= xy' - x'y. \end{aligned}$$

Si $\mathscr{B}$ est orthonormée indirecte alors, $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. On obtient alors toujours les points 1 et 2, cependant le point 3 retourne l'opposée : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -(xy' - x'y)$.

□

IV.2 Formulation géométrique

Proposition IV.2

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ deux vecteurs du plan. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$
2. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

Démonstration. Si $\vec{u} = \vec{0}$ le résultat est immédiat. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, on pose $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. On vérifie alors que

$$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\| = 1.$$

Autrement dit $\vec{i}$ est normé. Donc comme vu précédemment, en notant $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{i} = \cos(\theta)\vec{e_1} + \sin(\theta)\vec{e_2}.$$

On pose alors $\vec{j} = -\sin(\theta)\vec{e_1} + \cos(\theta)\vec{e_2}$. D'après ce qui précède, $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base orthonormée. Soit $r' = \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta' \in \mathbb{R}$ des coordonnées polaires de $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Pour le produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle &= \left\langle \|u\|\, \vec{i} \,\middle|\, r'\cos(\theta')\,\vec{i} + r'\sin(\theta')\,\vec{j} \right\rangle \\ &= \|u\|\, r'\cos(\theta') \left\langle \vec{i} \,\middle|\, \vec{i} \right\rangle + \|u\|\, r'\sin(\theta') \left\langle \vec{i} \,\middle|\, \vec{j} \right\rangle \\ &= \|u\|\, r'\cos(\theta'), \end{aligned}$$

car $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormée. De plus, $r' = \|\vec{v}\|$ et $\theta' = (\vec{u}, \vec{v})$. D'où

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

2. Pour le produit mixte,

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \det\left(\|u\|\,\vec{i}, r'\cos(\theta')\,\vec{i} + r'\sin(\theta')\,\vec{j}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \|u\| & r'\cos(\theta') \\ 0 & r'\sin(\theta') \end{vmatrix} \qquad \textit{car } \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \textit{ est orthonormée} \\ &= \|u\|\, r'\sin(\theta'). \end{aligned}$$

Comme $r' = \|\vec{v}\|$ et $\theta' = (\vec{u}, \vec{v})$, on conclut de même que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$

□

Exemple 15 : Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}^*$ un vecteur non nul, $A \in \mathscr{P}$. On note $\mathscr{D} = A + \vec{u}$ la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathscr{D}_k = \left\{ M \in \mathscr{P} \,\middle|\, \left\langle \vec{u} \,\middle|\, \overrightarrow{AM} \right\rangle = k \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}'_k = \left\{ M \in \mathscr{P} \,\middle|\, \det\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = k \right\}.$$

On appelle $\mathscr{D}_k$ **la ligne de niveau** d'ordre k de la fonction $M \mapsto \left\langle \vec{u} \,\middle|\, \overrightarrow{AM} \right\rangle$ et $\mathscr{D}'_k$ celle de $M \mapsto \det\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{D}'_0$.
2. Montrer que $\mathscr{D}_k$ est la droite orthogonale à la droite $\mathscr{D}$ passant par $B = A + k\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

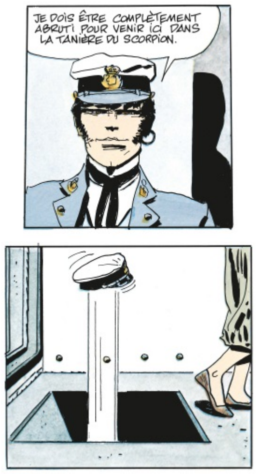
3. Montrer que $\mathscr{D}'_k$ est la droite parallèle à la droite $\mathscr{D}$ passant par $B = A + \frac{k}{\|\vec{u}\|}\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base orthonormée directe.

Définition IV.3

Soit $\vec{e} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ un vecteur unitaire. Pour tout $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, on appelle **projeté orthogonal** de $\vec{u}$ sur $\vec{e}$ ou sur la droite $\mathrm{Vect}\left(\vec{e}\right)$ le vecteur

$$\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e}.$$

Dessin :



Remarque 16 : ATTENTION, $\vec{e}$ doit être unitaire. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ n'est pas unitaire, on le normalise en posant $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est alors donné par

$$\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e} = \left\langle \vec{u} \middle| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

Proposition IV.4

Soit $\vec{e} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ un vecteur unitaire. Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et notons $p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{e}$. Alors, $\vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)$ est orthogonal à $\vec{e}$.

Démonstration. On a les égalité suivante dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right) | \vec{e} \rangle &= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right) | \vec{e} \rangle \\ &= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e} | \vec{e} \rangle \\ &= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \langle \vec{e} | \vec{e} \rangle \\ &= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle && \textit{car } \vec{e} \textit{ est unitaire.} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 17 : On a les égalités suivantes :

$$\|p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\| = \|\vec{u}\| \left|\cos\left(\vec{e}, \vec{u}\right)\right| \qquad \text{et} \qquad \|\vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\| = \|\vec{u}\| \left|\sin\left(\vec{e}, \vec{u}\right)\right|$$

En effet, par définition,

$$\|p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\| = \|\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e}\| = \left|\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle\right| \|\vec{e}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{e}\| \left|\cos\left(\vec{e}, \vec{u}\right)\right| \|\vec{e}\| = \|\vec{u}\| \left|\cos\left(\vec{e}, \vec{u}\right)\right|.$$

Puisque $p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)$ et $\vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)$ sont orthogonaux, par le théorème de Pythagore,

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right) + p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\|^2 = \|\vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\|^2 + \|p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\|^2.$$

Donc par ce qui précède,

$$\|\vec{u} - p_{\vec{e}}\left(\vec{u}\right)\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cos^2\left(\vec{e}, \vec{u}\right) = \|\vec{u}\|^2 \sin^2\left(\vec{e}, \vec{u}\right).$$

Proposition IV.5

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}$ deux vecteurs du plan et $ABCD$ un parallélogramme engendré par ces deux vecteurs (A un point quelconque de $\mathscr{P}$, $B = A + \vec{u}$, $D = A + \vec{v}$ et $C = A + \vec{u} + \vec{v}$). On note $\mathscr{A}_{ABCD}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$. Alors on a

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \mathscr{A}_{ABCD}.$$

Dessin :

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de D sur $\overrightarrow{AB}$, le point H tel que $\overrightarrow{AH}$ soit le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AD}$ sur $\overrightarrow{AB}$ ou encore tel que

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{AD} \middle| \overrightarrow{AB} \right\rangle}{AB^2} \overrightarrow{AB} = \frac{\langle \vec{v} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = p_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

Alors $[DH]$ est une hauteur du parallélogramme et $\overrightarrow{HD} = \vec{v} - p_{\vec{u}}(\vec{v})$. D'où

$$\mathscr{A}_{ABCD} = base \times hauteur = HD \times AB = \left\| \overrightarrow{HD} \right\| \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \|\vec{v} - p_{\vec{u}}(\vec{v})\| \, \|\vec{u}\|.$$

D'après la remarque précédente,

$$\mathscr{A}_{ABCD} = \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \, \|\vec{u}\| = |\det(\vec{u}, \vec{v})|.$$

□

Corollaire IV.6

Soit ABC un triangle du plan. Alors

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \right|.$$

V Equations de droites, de cercles

V.1 Equations de droites

Proposition V.1

Dans un repère $\mathscr{R}$, on considère $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$. Alors,

$$\mathcal{D} = A + \operatorname{Vect}(\vec{u}) = \left\{ M(x, y) \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \right\}.$$

Le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est appelé **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$.

Définition V.2

Soient $\mathcal{D}$ une droite, $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur du plan. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur **normal** à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, $\langle \vec{n} | \vec{u} \rangle = 0$.

Remarque 18 :

1. La définition est cohérente au sens où elle ne dépend pas du vecteur directeur choisi. Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de $\mathcal{D}$, alors $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$. Donc
$$\langle \vec{n} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{n} | \lambda\,\vec{u} \rangle = \lambda\,\langle \vec{n} | \vec{u} \rangle = 0.$$
2. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites et $\vec{u}$, respectivement $\vec{u'}$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, respectivement de $\mathcal{D}'$.
   - $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\vec{u}, \vec{u'}\right) = 0$.
   - $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left\langle \vec{u} \middle| \vec{u'} \right\rangle = 0$.

Proposition V.3

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\mathcal{D} = \{\, M\,(x, y) \mid ax + by + c = 0 \,\},$$
L'équation $ax + by + c = 0$ est appelé **représentation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$.
De plus $\vec{n}\,(a, b)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$. Alors $\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et donc $\vec{n} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Notons $a = \beta$ et $b = -\alpha$, on a $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. De plus $A\,(x_A, y_A)$ est un point de $\mathcal{D}$. Dès lors, pour $M\,(x, y) \in \mathscr{P}$, on a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + (-ax_A - by_A) = 0. \end{aligned}$$
Donc en posant $c = -ax_A - by_A$. On obtient bien $ax + by + c = 0$.
Réciproquement, si $\mathcal{D} = \{\, M\,(x, y) \mid ax + by + c = 0 \,\}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $A\,(x_A, y_A) \in d$ un point particulier de $\mathcal{D}$ (ce point existe car $\mathcal{D}$ non vide : par exemple, $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ si $a \neq 0$ ou $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ sinon). Alors on a
$$ax_A + by_A + c = 0$$
et donc $c = -ax_A - by_A$. Posons $\alpha = b$, $\beta = -a$ et $\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, on obtient que pour $M\,(x, y) \in \mathscr{P}$ on a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad ax + by + (-ax_A - by_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\beta\,(x - x_A) + \alpha\,(y - y_A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \det\left(\begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.} \end{aligned}$$
Conclusion, $\mathcal{D}$ est bien une droite (qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$).

□

Remarque 19 : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectivement $ax+by+c = 0$ et $a'x+b'y+c' = 0$.
- $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ si et seulement si $\vec{n}\,(a, b)$ et $\vec{n'}\,(a', b')$ sont colinéaires : $\det\left(\vec{n}, \vec{n'}\right) = 0$.
- $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ si et seulement si $\vec{n}\,(a, b)$ et $\vec{n'}\,(a', b')$ sont orthogonaux : $\left\langle \vec{n} \middle| \vec{n'} \right\rangle = 0$.

Exemple 20 :

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x+y-3=0$. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+2\,\lambda \\ y = -1-\lambda \end{cases}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
3. Soient $A\,(1,1)$ et $B\,(-1,2)$. Déterminer un vecteur directeur, un vecteur normal, une équation paramétrique et une équation cartésienne de (AB).
4. Soient $A\,(0,1)$ et $\overrightarrow{u}\,(2,3)$. Déterminer un vecteur normal, une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{d}$.
5. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x-3y+1=0$. Déterminer un vecteur directeur, un vecteur normal, une équation paramétrique et un point de $\mathcal{D}$.

Définition V.4

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et $A \in \mathscr{P}$ un point du plan.

1. On appelle **projeté** de A sur $\mathcal{D}$ l'unique point H de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AH}$ soit normal à $\mathcal{D}$.
2. On appelle **distance** de A à d le réel $d\,(A,\mathcal{D}) = AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$.

Proposition V.5

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan, $A \in \mathscr{P}$ un point du plan et H le projeté de A sur $\mathcal{D}$. Alors la distance de A à H est la plus courte longueur entre A et les points de $\mathcal{D}$:

$$d\,(A,\mathcal{D}) = \min_{M\in\mathcal{D}} \left\|\overrightarrow{AM}\right\|.$$

Dessin :

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{D}$, $M \neq H$. Alors $\overrightarrow{MH}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, c'est même par définition de H, le projeté du vecteur $\overrightarrow{MA}$ sur $\mathcal{D}$. On a alors vu précédemment que $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont orthogonaux. Donc par le théorème de Pythagore,

$$\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HA}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{HA}\right\|^2.$$

Par croissance de la racine carrée,

$$\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \geqslant \left\|\overrightarrow{HA}\right\| = d\,(A,\mathcal{D}).$$

Donc $\inf_{M\in\mathcal{D}} \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \geqslant d\,(A,\mathcal{D})$. Enfin cette borne inférieure est un minimum car est atteinte pour $M = H \in \mathcal{D}$. □

Proposition V.6

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $B \in \mathscr{P}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. Alors pour tout $A \in \mathscr{P}$,

$$d\,(A,\mathcal{D}) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{n} \right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax+by+c=0$. Alors pour tout $A\,(x_A,y_A)$,

$$d\,(A,\mathcal{D}) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration.

1. Soit H le projeté de A sur $\mathcal{D}$. Par la relation de Chasles,
$$\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{BH} \middle| \vec{n} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|.$$
Or $B \in \mathcal{D}$ et $H \in \mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (ou est un vecteur nul). Or $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ donc $\left\langle \overrightarrow{BH} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0$ et
$$\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|.$$
De plus $\overrightarrow{HA}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$ tout comme $\vec{n}$, donc $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\left(\overrightarrow{HA}, \vec{n}\right) = 0 \mod \pi$ et
$$\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \|HA\| \, \|\vec{n}\| = d\left(A, \mathcal{D}\right) \|\vec{n}\|.$$
2. Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ alors $\vec{n}\,(a, b)$ est un vecteur normal à d et $B\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ est un point de $\mathcal{D}$ (si $a \neq 0$ sinon choisir $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$). Donc par le point précédent,
$$d\left(A, \mathcal{D}\right) = \frac{\left|\left\langle \begin{bmatrix} x_A + \frac{c}{a} \\ y_A \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_A + c + by_A|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

V.2 Equation de cercle

Proposition V.7

Soit $\Omega\left(x_\Omega, y_\Omega\right) \in \mathscr{P}$ un point du plan et $R > 0$. Alors le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R est donné par
$$\mathscr{C} = \left\{ M\left(x, y\right) \,\middle|\, \left(x - x_\Omega\right)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2 = R^2 \right\}.$$
L'équation $\left(x - x_\Omega\right)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2 = R^2$ est appelé l'équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Démonstration. Soit $M\left(x, y\right) \in \mathscr{P}$. Par définition d'un cercle,
$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M = R \quad \Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - x_\Omega\right)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2 = R^2.$$

□

Exemple 21 :

1. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0$.

Proposition V.8

Soient $(A, B) \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ le cercle dont un diamètre est donné par $[AB]$. Alors
$$\mathscr{C} = \left\{ M \in \mathscr{P} \,\middle|\, \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Démonstration. Notons (x_A, y_A) les coordonnées de A et (x_B, y_B) les coordonnées de B dans un repère orthonormé $\mathscr{P}$. Le rayon de $\mathscr{C}$ est donné par
$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}}{2}.$$
Tandis que le centre Ω est le milieu de $[AB]$ et a donc pour coordonnées
$$x_\Omega = \frac{x_B + x_A}{2}, \qquad y_\Omega = \frac{y_B + y_A}{2}.$$

Donc par la propriété précédente, $\mathscr{C}$ a pour équation

$$\begin{aligned}
&\left(x-\frac{x_B+x_A}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_B+y_A}{2}\right)^2=\frac{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & x^2-x\left(x_B+x_A\right)+\frac{x_B^2+2x_Ax_B+x_A^2}{4}\\
&\qquad +y^2-y\left(y_B+y_A\right)+\frac{y_B^2+2y_Ay_B+y_A^2}{4}=\frac{x_B^2-2x_Bx_A+x_A^2+y_B^2-2y_By_A+y_A^2}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & x^2-x\left(x_B+x_A\right)+y^2-y\left(y_B+y_A\right)+x_Ax_B+y_Ay_B=0.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM}\right\rangle &= \langle (x-x_A,y-y_A)|(x-x_B,y-y_B)\rangle\\
&=\left(x-x_A\right)\left(x-x_B\right)+\left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right)\\
&=x^2-x\left(x_A+x_B\right)+x_Ax_B+y^2-y\left(y_A+y_B\right)+y_Ay_B.
\end{aligned}$$

Donc par ce qui précède,

$$M\left(x,y\right)\in\mathscr{C}\qquad\Leftrightarrow\qquad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM}\right\rangle=0.$$

□

Exemple 22 : Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $\left(x-1\right)^2+y^2=2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x+y-2=0$. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ avec $\mathcal{D}$.

VI Transformations du plan

VI.1 Rotation vectoriel dans le plan

Définition VI.1

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. **La rotation vectoriel** r_θ est l'application de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ retourne l'unique vecteur $r_\theta\left(\vec{u}\right)$ de même norme que $\vec{u}$ et formant un angle θ avec $\vec{u}$:

$$\left\|r_\theta\left(\vec{u}\right)\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\qquad\text{et}\qquad\left(\vec{u},r_\theta\left(\vec{u}\right)\right)=\theta.$$

Dessin :

Remarque 23 : Nous avions défini dans le chapitre 3 sur les complexes la rotation sur $\mathscr{P}$. Soient $\Omega\in\mathscr{P}$ et $r_{\theta,\Omega}$ est la rotation de $\mathscr{P}$ de centre Ω et d'angle θ. On a naturellement l'équivalence suivante

$$\forall\left(M,M'\right)\in\mathscr{P}^2,\quad M'=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{rotation affine}}}{r_{\theta,\Omega}}\left(M\right)\qquad\Leftrightarrow\qquad\overrightarrow{\Omega M'}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{rotation vectoriel}}}{r_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

Proposition VI.2

Soient $\theta\in\mathbb{R}$, r_θ la rotation vectoriel du plan d'angle θ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. L'application $r_\theta\in\mathscr{L}\left(\overrightarrow{\mathscr{P}}\right)$ est linéaire et

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(r_\theta\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}.$$

Démonstration. On donnera ci-dessous les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$. Soit $\vec{u}(x, y)$. On pose (r, α) les coordonnées polaires de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors le vecteur $r_\theta(\vec{u})$ a pour coordonnées polaires $(r, \alpha+\theta)$ dans $\mathscr{B}$. Donc les coordonnées cartésiennes (x', y') de $r_\theta(\vec{u})$ sont

$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta+\alpha) = r\cos(\theta)\cos(\alpha) - r\sin(\theta)\sin(\alpha) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = r\sin(\theta+\alpha) = r\cos(\theta)\sin(\alpha) + r\cos(\alpha)\sin(\theta) = y\cos(\theta) + x\sin(\theta) \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} r_\theta : \overrightarrow{\mathscr{P}} &\to \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\mapsto r_\theta(\vec{u})\begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y\cos(\theta) + x\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il est donc facile de voir que r_θ est linéaire et sa matrice est bien

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 24 : La matrice de r_θ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ orthonormée directe choisie ! (mais elle doit être orthonormée directe).

Corollaire VI.3

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, r_θ la rotation vectoriel du plan d'angle θ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

1. L'application r_θ est un automorphisme.
2. L'application r_θ est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\|r_\theta(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.
3. L'application r_θ conserve le produit scalaire : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$, $\langle r_\theta(\vec{u}) | r_\theta(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u} | \vec{v}\rangle$.
4. L'image d'une base orthonormée directe par r_θ est une base orthonormée directe : $r_\theta(\mathscr{B})$ est une base orthonormée directe.
5. La matrice de r_θ dans une base orthonormée est une matrice orthogonale :
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)^T = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_{-\theta}).$$

Démonstration.

1. On a $\det(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$. Donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)$ est inversible et donc r_θ est un automorphisme.
2. Par définition de r_θ.
3. On a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned} \langle r_\theta(\vec{u}) | r_\theta(\vec{v})\rangle &= \frac{\|r_\theta(\vec{u}) + r_\theta(\vec{v})\|^2 - \|r_\theta(\vec{u}) - r_\theta(\vec{v})\|^2}{4} && \text{par l'identité de polarisation} \\ &= \frac{\|r_\theta(\vec{u}+\vec{v})\|^2 - \|r_\theta(\vec{u}-\vec{u})\|^2}{4} && \text{par linéarité de } r_\theta \\ &= \frac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{u}\|^2}{4} && \text{par isométrie (le point précédent)} \\ &= \langle \vec{u} | \vec{v}\rangle && \text{par l'identité de polarisation.} \end{aligned}$$
4. Par le point 1, $r_\theta(\mathscr{B})$ est une base, par le point 2, les vecteurs de $r_\theta(\mathscr{B})$ restent normés, par le point 3, les vecteurs de $r_\theta(\mathscr{B})$ restent orthogonaux et puisque $\det(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)) = 1 \geqslant 0$, l'orientation de la base reste inchangée.

□

Exemple 25 :

1. Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$.
2. Les matrices suivantes sont-elles des matrices de rotation ?

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

VI.2 Projection orthogonale dans le plan

Définition VI.4

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$. On appelle **projection orthogonale** sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ l'application définie par

$$p_{\vec{u}} : \overrightarrow{\mathscr{P}} \to \overrightarrow{\mathscr{P}}$$
$$\vec{v} \mapsto p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Proposition VI.5

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$. La projection orthogonale $p_{\vec{u}}$ sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ est linéaire $p_{\vec{u}} \in \mathscr{L}\left(\overrightarrow{\mathscr{P}}\right)$. En notant $\vec{e_1} = \vec{u}$ et $\vec{e_2}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ défini par exemple par $\vec{e_2} = r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{e_1})$, on a

$$\mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessin :

Démonstration. Le caractère linéaire de $p_{\vec{u}}$ découle de la linéarité du produit scalaire. De plus $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ étant orthogonale est une famille libre (EXO !). Comme elle est de cardinal $2 = \dim\left(\overrightarrow{\mathscr{P}}\right)$, on en déduit que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est bien une base du plan. On a

$$p_{\vec{u}}(\vec{e_1}) = p_{\vec{u}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \vec{u}.$$

De plus,

$$p_{\vec{u}}(\vec{e_2}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{e_2} \rangle \, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = 0_{\mathbb{R}}.$$

car $\vec{e_2}$ est orthogonal à $\vec{e_1} = \vec{u}$ donc $\langle \vec{e_1} | \vec{e_2} \rangle = 0_{\mathbb{R}}$. De ces égalités on en déduit bien la matrice. □

Remarque 26 :

1. La matrice donnée dans la projection n'est valable QUE dans une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ adaptée !
2. L'expression de $p_{\vec{u}}$ ne dépend pas du vecteur directeur de $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ choisi. En particulier, $p_{\vec{u}} = p_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}$.
3. Une projection n'est pas une isométrie et ne conserve ni la norme ni le produit scalaire. Exemple $\|p_{\vec{u}}(\vec{e_2})\| = 0 \neq \|\vec{e_2}\|$.
4. L'application $p_{\vec{u}}$ est un endomorphisme mais pas un automorphisme.

Exemple 27 : Donner la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}((1, 1))$ dans la base canonique. Donner ensuite sa matrice dans une base adaptée à la projection.

Proposition VI.6

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ et $\vec{n} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ un vecteur normal à $\vec{u}$, $\mathscr{B}$ une base de $\vec{\mathscr{P}}$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p_{\vec{u}})$. Alors

$$p_{\vec{u}} \text{ est un projecteur : } p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}} = p_{\vec{u}} \text{ i.e. } A^2 = A.$$

Et,

1. $\mathrm{Im}\,(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\,(\vec{u})$.
2. $\mathrm{Ker}\,(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\,(\vec{n})$.

Remarque 28 : On rappelle que comme $p_{\vec{u}}$ est un projecteur : $\mathrm{Im}\,(p_{\vec{u}}) = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathscr{P}} \,\middle|\, p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \right\}$.

Démonstration. Avec les notations de la proposition précédente, on pose $D = \mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

1. on observe que $D^2 = D$ i.e. $\mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}}) = \mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}})$. Donc $p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}} = p_{\vec{u}}$. Par suite, $A^2 = A$.
2. $\mathrm{Im}\,(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$. Donc $\mathrm{Im}\,(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\,(\vec{e_1}) = \mathrm{Vect}\,(\vec{u})$.
3. Soit $\vec{v} \in \vec{\mathscr{P}}$ de coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. On a

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(p_{\vec{u}}) \quad \Leftrightarrow \quad D \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = b\vec{e_2}$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}\,(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\,(e_2) = \mathrm{Vect}\,(\vec{n})$.

□

Exemple 29 : Vérifier que l'application $p : (x, y) \mapsto \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5}\right)$ est une projection orthogonale. Déterminer son image et son noyau.

VI.3 Symétrie orthogonale dans le plan

Définition VI.7

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$. On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$ l'application définie par

$$\begin{aligned} s_{\vec{u}} : \vec{\mathscr{P}} &\to \vec{\mathscr{P}} \\ \vec{v} &\mapsto s_{\vec{u}}(\vec{v}) = 2\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} - \vec{v}. \end{aligned}$$

Dessin :

Proposition VI.8

Soient $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$, $s_{\vec{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$, $p_{\vec{u}}$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$. On a alors

$$s_{\vec{u}} = 2p_{\vec{u}} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{P}}}.$$

Corollaire VI.9

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$. La symétrie orthogonale $s_{\vec{u}}$ par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\vec{u}\right)$ est linéaire. De plus, en notant $\vec{e_1} = \vec{u}$ et $\vec{e_2} = r_{\frac{\pi}{2}}\left(\vec{e_1}\right)$, on a

$$\mathrm{mat}_{\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)}\left(s_{\vec{u}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Puisque $s_{\vec{u}}$ est la différence de deux applications linéaires du plan, $s_{\vec{u}}$ est un endomorphisme de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. De plus, par propriété sur les représentations matricielles, en notant $\mathscr{C} = \left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(s_{\vec{u}}\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(2p_{\vec{u}} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right) = 2\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(p_{\vec{u}}\right) - \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 30 : Comme pour la projection, cette représentation matricielle ne fonctionne que parce que la base est adaptée à la symétrie.

Corollaire VI.10

Soient $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, $s_{\vec{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\vec{u}\right)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

1. L'application $s_{\vec{u}}$ est un automorphisme.
2. L'application $s_{\vec{u}}$ est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\left\|s_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$.
3. L'application $s_{\vec{u}}$ conserve le produit scalaire : $\forall \left(\vec{v}, \vec{v'}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$, $\left\langle s_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) \middle| s_{\vec{u}}\left(\vec{v'}\right)\right\rangle = \left\langle \vec{v} \middle| \vec{v'}\right\rangle$.
4. L'image d'une base orthonormée directe par $s_{\vec{u}}$ est une base orthonormée indirecte :
   $s_{\vec{u}}\left(\mathscr{B}\right)$ est une base orthonormée indirecte.
5. La matrice de $s_{\vec{u}}$ dans une base orthonormée directe est une matrice orthogonale :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)^{T} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right).$$

Démonstration.

1. Avec les notations précédentes, en posant $\mathscr{C} = \left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on a $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(s_{\vec{u}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Or $\det\left(A\right) = -1 \neq 0$, donc A est inversible et donc $s_{\vec{u}}$ est bijective. Conclusion, $s_{\vec{u}}$ est un automorphisme.
2. Soit $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et (a, b) ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(s_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)\right) = A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}.$$

   Donc, puisque la base $\mathscr{C}$ est orthonormée,

$$\left\|s_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)\right\| = \sqrt{a^2 + \left(-b\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \left\|\vec{v}\right\|.$$

3. Même démonstration que pour la rotation en utilisant l'identité de polarisation, la linéarité et le point précédent : EXO !
4. Par le point 1, l'image d'une base est une base, par le point 2, les normes sont conservées, par le point 3, l'orthogonalité est conservée et puisque $\det\left(A\right) = -1$, l'orientation est inversée.
5. L'égalité $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)^{T} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)$ est immédiate si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$: $A^{-1} = A^T = A$. Donc, par un théorème sur la représentation matricielle, on en déduit que $s_{\vec{u}}^{-1} = s_{\vec{u}}$ donc toujours par un résultat sur la représentation matricielle pour toute base $\mathscr{B}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)$. On admet que si $\mathscr{B}$ est orthonormée, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(s_{\vec{u}}\right)$ est symétrique

□

Proposition VI.11

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ et $\vec{n} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ un vecteur normal à $\vec{u}$, $\mathscr{B}$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p_{\vec{u}})$. Alors

$$s_{\vec{u}} \text{ est une symétrie : } s_{\vec{u}} \circ s_{\vec{u}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}} \text{ i.e. } A^2 = I_2.$$

Et,

1. $\mathrm{Vect}(\vec{u}) = \left\{ \vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \;\middle|\; s_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \right\} = \mathrm{Ker}\left(s_{\vec{u}} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right)$
2. $\mathrm{Vect}(\vec{n}) = \left\{ \vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \;\middle|\; s_{\vec{u}}(\vec{v}) = -\vec{v} \right\} = \mathrm{Ker}\left(s_{\vec{u}} + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right)$.

Démonstration. EXO !

□

Exemple 31 :

1. Déterminer dans la base canonique la matrice de la symétrie sur $\mathrm{Vect}((1,1))$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie et déterminer son axe.

David HILBERT *(Königsberg 1862 - Göttingen 1943) est mathématicien allemand. Il passe son enfance à Königsberg où il rencontre le mathématicien Minkowski. Il étudie à l'université de la ville et obtient un poste d'enseignant à partir de 1884. Un an plus tard, il décroche son doctorat. Il acquiert rapidement une notoriété internationale et devient professeur à l'Université de Göttingen en 1895 jusqu'à la fin de sa carrière en 1930, et ce malgré d'autres offres. Hilbert s'intéresse à tous les domaines des mathématiques, aussi bien théoriques qu'appliqués. Il lui doit des travaux notamment en théorie des nombres, sur les équations différentielles, en géométrie mais aussi en physique mathématique sur le problème des trois corps. Au fondement des mathématiques, il est un temps le chef de file de la pensée que toute théorie mathématique se construit entièrement à partir d'axiomes. Il apporte des nouvelles méthodes et des généralisations dans de nombreux domaines auxquels il donna une forte impulsion. Sa très célèbre présentation des 23 problèmes du siècle qui restaient selon lui à résoudre au Congrès de Paris en 1900 fut et est encore de nos à l'origine de nombreuses recherches fécondes.*
Toujours soucieux de généraliser, de trouver de nouvelles méthodes et de motiver la communauté mathématique, Hilbert joua un rôle fondamental dans le développement des mathématiques et reste probablement le dernier mathématicien à avoir dominer toutes les branches.

Personnage entier, sa reconnaissance à travers l'Europe n'a été que favorisée par son ouverture sur le monde. Il publie en 1917 un éloge de l'illustre mathématicien français Darboux. Critiqué par ses étudiants, il exige et obtient de leur part une excuse formelle. Il assistera avec tristesse à la purge du nazisme montant qui expulse et provoque la fuite de plusieurs de ses collègues. On raconte que Hilbert fut invité à un banquet pendant lequel le ministre nazi de l'éducation lui demanda « Comment se trouve les mathématiques à Göttingen maintenant qu'elle est libre de l'influence juive ? » Ce à quoi Hilbert répliqua : « Des mathématiques à Göttingen ? Il n'y en a plus guère ».

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel réel sur lequel est défini un produit scalaire. Lorsqu'il vérifie une caractéristique particulière (on dit qu'il est complet, ce qui est notamment le cas lorsqu'il est de dimension finie) alors on dit que c'est un espace hilbertien.

« Certaines personnes ont un horizon de rayon nul et l'appellent leur point de vue. ».

David Hilbert

Le mathématicien Gordan découvrant que Hilbert redémontre ses résultats mais par une méthode tellement plus rapide et efficace s'exclama « Ce ne sont pas des mathématiques, c'est de la théologie ! ». Plus tard, se plongeant à nouveau dans les travaux de Hilbert, il rectifia « Je suis tout de même convaincu que la théologie a elle aussi ses avantages... »

Bien que soucieux de sa pédagogie, Hilbert a la réputation d'être cassant avec ceux qui peinaient à comprendre les mathématiques. A la fin d'une de ses conférences, Hilbert se tourna vers son auditoire pour demander s'il y avait des questions. Un doigt timide se leva :
« -Je n'ai pas très bien compris l'avant-dernier théorème...
-Ce n'est pas une question. »

Il savait cependant a contrario, mettre en exergue les qualités de ses étudiants. Un jour l'un d'entre eux lui proposa un papier dans lequel il présentait une preuve de l'hypothèse de Riemann. Hilbert est très impressionné par la qualité du travail mais y décèle une erreur qu'il ne parvient pas à rectifier. L'année suivante, l'étudiant meurt tragiquement dans un accident. Les parents connaissant la très grande admiration que vouait leur fils à Hilbert, lui demande de prononcer une oraison. Le jour de l'enterrement, les amis et la famille en deuil pleurent près du tombeau sous une pluie et un vent cinglants. Hilbert s'avance, ajuste ses lorgnons et déclare d'une voix grave : « Quelle tragédie de perdre un jeune homme si doué avant qu'il n'ait eu le temps de montrer tout ce qu'il était capable d'accomplir. Mais malgré l'erreur contenue dans sa tentative pour démontrer l'hypothèse de Riemann, il est possible qu'un jour une solution du célèbre problème soit découverte, en suivant les idées proposées par le défunt. » Après une pause solennelle, insensible à la pluie et devant une assistance médusée, Hilbert s'enthousiasme : « En fait, considérons une fonction de la variable complexe... »

Au début d'un cours, Hilbert s'étonne auprès de son assistant : « Cela fait plusieurs semaines que je n'ai pas vu Monsieur Bosch, lui est-il arrivé quelque chose ? ». Ennuyé, l'assistant lui explique :« Il a renoncé aux mathématiques pour s'engager dans des études de poésie. » Esquissant un sourire, Hilbert déclare alors « C'est une bonne chose, j'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour faire des mathématiques... »