Chapitre VII : Equations complexes

I L'exponentielle complexe

On considère connue la fonction exponentielle sur les réels et nous l'avons définie sur $i\mathbb{R}$ dans le chapitre 4 par la définition II.9 :

Rappel (L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit **l'exponentielle complexe** sur $i\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Nous allons maintenant voir comment étendre cette fonction sur l'ensemble des complexes.

Définition I.1

On appelle **fonction exponentielle complexe** la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Im}(z)} \end{array}$$

Remarque 1 :

1. Autrement dit, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a
$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a(\cos(b) + i\sin(b)) = \mathrm{e}^a\cos(b) + i\,\mathrm{e}^a\sin(b).$$
2. D'après le point précédent, il est évident que $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ en général et de même pour la partie imaginaire.
3. La fonction exponentielle complexe étend celle définie sur les réelles ou les imaginaires pures : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{a+i0} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{i0} = \mathrm{e}^a$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{0+i\theta} = \mathrm{e}^0\,\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}$.

Proposition I.2

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z' \in \mathbb{C}$,

1. $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^a\cos(b)$
2. $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^a\sin(b)$
3. $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$
4. $\mathrm{e}^z \neq 0$
5. $\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$
6. $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$
7. $\forall p \in \mathbb{Z}$, $(\mathrm{e}^z)^p = \mathrm{e}^{pz}$
8. $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
9. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi$.

Démonstration.

1. Puisque pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\cos(b) + i\,\mathrm{e}^a\sin(b)$, le résultat est immédiat.
2. Idem.
3. $|\mathrm{e}^z| = \left|\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}\right| = |\mathrm{e}^a|\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = \mathrm{e}^a$.
4. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^z = 0$, alors $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a = 0$ ce qui est absurde car l'exponentielle réelle est toujours strictement positive donc $\mathrm{e}^z \neq 0$.
5. Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$, avec $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$. On a, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle et la Proposition II.10 du Chapitre 4,
$$\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}\,\mathrm{e}^{a'}\,\mathrm{e}^{ib'} = \mathrm{e}^{a+a'}\,\mathrm{e}^{i(b+b')} = \mathrm{e}^{(a+a')+i(b+b')} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$
6. Puisque l'exponentielle complexe ne s'annule jamais, on peut prendre son inverse. De plus, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle et la Proposition II.10 du Chapitre 4, pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \frac{1}{\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}\frac{1}{\mathrm{e}^{ib}} = e^{-a}\,\mathrm{e}^{-ib} = \mathrm{e}^{-a-ib} = \mathrm{e}^{-z}.$$
Ce résultat pouvait aussi se déduire du point précédent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^0 = 1$. Donc en divisant cette égalité par e^z, on obtient $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$.

7. Deux méthodes. Soit on démontre le résultat par récurrence sur les entiers naturels puis à l'aide du point précédent, on l'étend sur l'ensemble des entiers relatifs. Soit on utilise les propriétés de l'exponentielle réelle et la formule de Moivre : pour tout $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $p \in \mathbb{Z}$, $(\mathrm{e}^z)^p = \left(\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}\right)^p = (\mathrm{e}^a)^p\left(\mathrm{e}^{ib}\right)^p = \mathrm{e}^{pa}\,\mathrm{e}^{ipb} = \mathrm{e}^{pa+ipb} = \mathrm{e}^{p(a+ib)} = \mathrm{e}^{ipz}$.
8. Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $\overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}} = \overline{\mathrm{e}^a}\,\overline{\mathrm{e}^{ib}} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{-ib} = \mathrm{e}^{a-ib} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
9. Soient $z = a+ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a'+ib' \in \mathbb{C}$, avec $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \\ |\mathrm{e}^z| = \left|\mathrm{e}^{z'}\right| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{a'}\,\mathrm{e}^{ib'} \\ \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{a'} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib'} \\ a = a' \end{cases} \qquad \text{par injectivité de la fonction exponentielle } \textbf{réelle} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{ib'} \\ a = a' \end{cases} \qquad \text{car } \mathrm{e}^a > 0 \text{ car } a \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(b) + i\sin(b) = \cos(b') + i\sin(b') \\ a = a' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(b) = \cos(b') \\ \sin(b) = \sin(b') \\ a = a' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b \equiv b' \ [2\pi] \\ a = a' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a+ib = a' + i\,(b' + 2k\pi)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z' + 2ik\pi.$$

□

Exemple 2 : Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 3\sqrt{3} - 3i$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

II Equations algébriques complexes

II.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition II.1

Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle **racine carrée** de z tout complexe $\omega \in \mathbb{C}$ vérifiant $\omega^2 = z$.

Proposition II.2

Tout complexe non nul $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, admet exactement deux racines carrées ω_1 et ω_2 données par

$$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\omega_1.$$

Démonstration. Analyse. Soient $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Puisque $z \neq 0$, il est clair que $\omega \neq 0$. Donc il existe $(\rho,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $\omega = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ et l'égalité $\omega^2 = z$ se traduit par $\rho^2\,\mathrm{e}^{2i\varphi} = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. D'après la pseudo-unicité de la forme polaire, on en déduit que $\rho^2 = r$ et $2\varphi \equiv \theta\ [2\pi]$. Puisque ρ est un réel strictement positif, on a $\rho = \sqrt{r}$. De plus $\varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [\pi]$ donc $\varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$ ou $\varphi \equiv \frac{\theta}{2} + \pi\ [2\pi]$. On en déduit qu'il existe (au plus) deux solutions :

$$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\omega_1.$$

Synthèse. On vérifie aisément que les complexes données ci-dessus sont solutions, c'est-à-dire que $\omega_1^2 = z$ et $\omega_2^2 = z$.

□

Exemple 3 : Déterminer les racines carrées de $1-i$.

Remarque 4 :

1. Le complexe 0 admet une unique racine carrée qui est 0 naturellement.
2. Si $z = a > 0$, on retrouve la racine carrée classique et son opposée : $a = a\,\mathrm{e}^{i0}$ donc ses racines sont $\omega_1 = \sqrt{a}\,\mathrm{e}^{i\frac{0}{2}} = \sqrt{a}$ et $\omega_2 = \sqrt{a}\,\mathrm{e}^{i\pi} = -\sqrt{a}$.
3. Si $z = a < 0$, $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\pi}$ donc ses racines sont $\omega_1 = \sqrt{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{|a|}$ et $\omega_2 = \sqrt{|a|}\,\mathrm{e}^{3i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{|a|}$.
4. Contrairement aux réels positifs, pour les complexes il n'existe pas de racine « privilégiée ». La notation $\sqrt{\ }$ n'a donc aucun sens pour un complexe en général et est donc STRICTEMENT réservée aux réels positifs.

Racines carrées sous forme algébrique. Bien qu'en règle générale la forme trigonométrique semble toute désignée pour la recherche des racines, il est possible de devoir le faire sous forme cartésienne. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^2 = z$. Puisque $\omega^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, l'unicité de la forme algébrique implique que

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy. \end{cases}$$

En considérant le module, on peut ajouter une équation : $|\omega|^2 = |z| \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$. En résumé,

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \\ \sqrt{a^2+b^2} = x^2 + y^2. \end{cases}$$

En couplant les lignes 1 et 3, on obtient $x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$. De plus $b = 2xy$ permet de déterminer le signe de x et de y.

- Si $b \geqslant 0$, x et y sont de même signe et donc

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}}. \end{cases}$$

  Ce qui nous donne bien deux solutions.
- Si $b \leqslant 0$, x et y sont de signe différent et donc

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}}. \end{cases}$$

  Ce qui nous donne encore une fois deux racines.

Exemple 5 : Déterminer les racines carrées de $1-i$ et à l'aide des solutions trouvées dans l'exemple 3 en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

II.2 Equations complexes du second degré

Définition II.3

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ trois complexes avec $a \neq 0$ et considérons le trinôme $az^2 + bz + c$. Une équation du second degré est la résolution de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{E}$$

On appelle racine de (E) toute solution de (E). On définit Δ **le discriminant** associé à (E) par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition II.4

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ trois complexes avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant et δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ : $\delta^2 = (-\delta)^2 = \Delta$.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$ admet une unique solution
$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$
- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions distinctes :
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Démonstration. Avec les notations de la proposition, on écrit le trinôme sous forme canonique
$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, alors
$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$$
et l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour unique solution $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors
$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) \\ &= a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$
et on conclut que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

□

Exemple 6 : Déterminer les racines complexes de $z^2 + (1-i)z + 4 + 7i$.

Proposition II.5 (Relations racines-coefficients)

Soient $p \in \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{C}$. Les complexes $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ (éventuellement confondus) sont solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$ si et seulement si
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p. \end{cases}$$

Exemple 7 : A l'aide d'une racine « évidente » de l'équation $3iz^2 - (9+6i)\,z + 18 = 0$ déterminer toutes les solutions de cette équation.

Proposition II.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P : z \mapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ une fonction polynomiale à coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ complexes. Soit $a \in \mathbb{C}$. Le complexe a est une racine de P i.e. $P(a) = 0$ si et seulement si P se factorise par $z - a$: pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)\left(b_0 + b_1 z + \ldots b_n z^{n-1}\right)$, avec $b_0, b_1, \ldots b_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Exemple 8 : Factoriser l'expression $z^2 + (3+2i)\,z + 6i$, $z \in \mathbb{C}$.

Proposition II.7

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, des coefficients **REELS**. Si ξ est une racine de $P : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$

$$P(\xi) = a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n = 0$$

alors $\overline{\xi}$ est également une racine de P (éventuellement confondue avec ξ si ξ est aussi réel).

Exemple 9 : Factoriser dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

II.3 Racines n-ième de l'unité

Définition II.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle **racine n-ième de l'unité** tout complexe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

Proposition II.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $\mathbb{U}$, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes.

1. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est inclus dans $\mathbb{U}$.
2. L'élément neutre de la multiplication 1 appartient à $\mathbb{U}_n$.
3. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est stable par produit : $\forall (\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n^2,\ \omega\omega' \in \mathbb{U}_n$
4. Tout élément de $\mathbb{U}_n$ est inversible dans $\mathbb{U}_n$: $\forall \omega \in \mathbb{U}_n,\ \omega^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, alors $|\omega^n| = |\omega|^n = 1$. Or $|\omega| \geqslant 0$, donc $|\omega| = 1$ et donc $\omega \in \mathbb{U}$.
   Exercice : démontrer que si $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^n = 1$, alors $x = 1$. Pensez à utiliser la contraposée.
2. Evident.
3. Soit $(\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n^2$, alors $(\omega\omega')^n = \omega^n (\omega')^n = 1$ et donc $\omega\omega' \in \mathbb{U}_n$.
4. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\left(\frac{1}{\omega}\right)^n = \frac{1}{\omega^n} = 1$.

□

Remarque 10 : Puisque $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}$, on en déduit que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a $\overline{\omega} = \omega^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

Proposition II.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est donné par :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Démonstration. *Version division euclidienne.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Observons que $0 \notin \mathbb{U}_n$. Donc

$$\omega^n \in \mathbb{U}_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega \in \mathbb{U}_n \ \text{ ET } \ \omega \neq 0.$$

Fixons donc $\omega \in \mathbb{C}^*$ et posons $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $\omega = \rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathbb{U}_n \quad &\Leftrightarrow \quad \omega^n = \left(\rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}\right)^n = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^n\, \mathrm{e}^{in\,\varphi} = 1 = 1 \times \mathrm{e}^{i0} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\,\varphi \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \qquad \text{par « unicité » de la forme trigonométrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \qquad \text{car l'équation } x^n = 1 \text{ n'admet qu'une seule solution dans } \mathbb{R}_+ \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \frac{2k\pi}{n}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'oeil attentif aura remarqué que ce n'est pas encore la conclusion de la proposition. Posons

$$\mathscr{R}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.$$

On a directement $\mathscr{R}_n \subseteq \mathbb{U}_n$. Montrons que $\mathbb{U}_n \subseteq \mathscr{R}_n$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Par ce qui précède, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\omega = \mathrm{e}^{i\,\frac{2p\pi}{n}}.$$

Par la division euclidienne de p par n, il existe (un unique) couple $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $p = qn + r$. Dès lors,

$$\omega = \underbrace{\mathrm{e}^{i2q\pi}}_{=1} \mathrm{e}^{i\,\frac{2r\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\,\frac{2r\pi}{n}} \in \mathscr{R}_n.$$

Donc $\mathbb{U}_n \subseteq \mathscr{R}_n$. Conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \Delta_n.$$

Version colle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Observons que $0 \notin \mathbb{U}_n$. Donc

$$\omega^n \in \mathbb{U}_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega \in \mathbb{U}_n \ \text{ ET } \ \omega \neq 0.$$

Fixons donc $\omega \in \mathbb{C}^*$ et posons $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $\omega = \rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathbb{U}_n \quad &\Leftrightarrow \quad \omega^n = \left(\rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}\right)^n = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^n\, \mathrm{e}^{in\,\varphi} = 1 = 1 \times \mathrm{e}^{i0} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\,\varphi \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \qquad \text{par « unicité » de la forme trigonométrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \qquad \text{car l'équation } x^n = 1 \text{ n'admet qu'une seule solution dans } \mathbb{R}_+ \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \frac{2k\pi}{n}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Or, par construction, $\varphi \in [0; 2\pi[$ et de plus pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$0 \leqslant \frac{2k\pi}{n} < 2\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant k < n \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \qquad \textit{car } (k, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Ainsi,

$$\omega \in \mathbb{U}_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \varphi = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \omega = \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

□

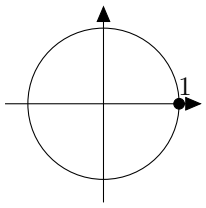
Définition II.11

On note j le complexe

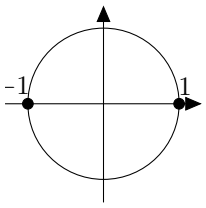
$$j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 11 :

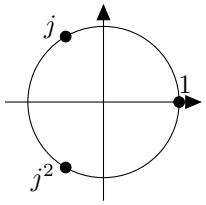
- Pour $n = 1$, $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.



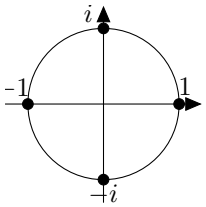
- Pour $n = 2$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$.



- Pour $n = 3$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.



- Pour $n = 4$, $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.



Remarque 12 :

1. Les racines n-ième de l'unité découpent le cercle unité en n parts égales.
2. A partir d'une racine n-ième de l'unité, on en déduit toutes les autres par des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Proposition II.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a
$$\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = (z-1)\left(z - \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\cdots\left(z - \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right).$$

Démonstration.

1. Comme dans $\mathbb{R}$, on démontre (exercice !) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$
Donc $z = \omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 1$ et $1 - z^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.
2. C'est la forme factorisée du polynôme $X^n - 1$ dont les n racines complexes sont données par les racines n-ième de l'unité. Cf le chapitre ultérieur sur les polynômes.

□

Exemple 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

Définition II.13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine n-ième de** z tout complexe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que

$$\omega^n = z.$$

Proposition II.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout complexe non nul $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, admet exactement n racines n-ième distinctes données par

$$\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\omega^n = z$. Il est clair que $\omega \neq 0$ donc il existe $(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $\omega = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. L'équation $\omega^n = z$ implique que $|\omega|^n = \rho^n = |z| = r$. Or ρ est un réel strictement positif. Donc $\rho = \sqrt[n]{r}$. Par ailleurs, $\omega^n = z$ implique que

$$\rho^n\left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n \mathrm{e}^{-i\theta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{i\left(\varphi-\frac{\theta}{n}\right)}\right)^n = 1.$$

Autrement dit le complexe $\mathrm{e}^{i\left(\varphi-\frac{\theta}{n}\right)}$ est une racine n-ième de l'unité. Donc il existe $k \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $\varphi - \frac{\theta}{n} = \frac{2k\pi}{n}$. Finalement, le complexe ω s'écrit

$$\omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

□

Exemple 14 :

1. Déterminer les racines 3-ième de $\frac{1-i}{4}$.
2. Déterminer les racines 6-ième de $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$.

Corollaire II.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient z_1 et z_2 deux racines n-ième d'un même complexe non nul z alors il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel que $z_2 = \omega z_1$.
2. Soit z_1 une racine n-ième d'un complexe non nul z alors les racines n-ième de z sont données par

$$z_1\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Démonstration.

1. Puisque $z \neq 0$, alors $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$ et il est facile de voir que $\frac{z_1}{z_2}$ est une racine n-ième de l'unité.
2. Si z_2 est une autre racine n-ième, d'après le point précédent, on sait qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel que $z_2 = z_1\omega$. Comme $\omega \in \mathbb{U}_n$, il existe $k \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $z_2 = z_1\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

□

Exemple 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les solutions de l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

III Applications géométriques

III.1 Alignement, orthogonalité

Proposition III.1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan complexe d'affixe z et z' respectivement.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z}{z'} \in i\mathbb{R}$.

Soient $A\,(z_A)$, $B\,(z_B)$ et $C\,(z_C)$ trois points distincts du plan complexe.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.
2. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration. Ce sont des conséquences directes de la proposition II.17 du chapitre 4. □

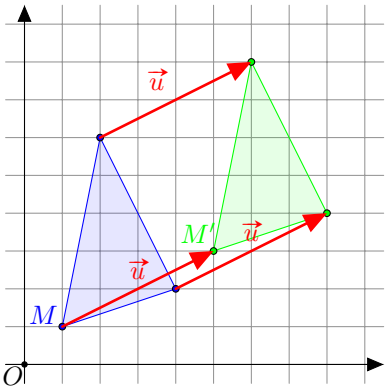
Exemple 16 : Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points du plan complexe. Démontrer que $M(z)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si

$$|z|^2 - \mathrm{Re}\left(\overline{a+bz}\right) + \mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) = 0.$$

III.2 Transformations du plan

Définition III.2

La translation de vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$ est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Proposition III.3

Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application

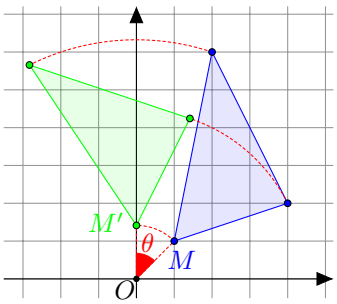
$$\tau_{\vec{u}} : \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + b. \end{array}$$

est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

Démonstration. Soient $M(z)$ un point du plan complexe, $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b et M' le point d'affixe $\tau_{\vec{u}}(z) = z+b$. Alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z + b - z = b$. Donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc $\tau_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. □

Définition III.4

- **La rotation** d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre O est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $OM = OM'$ et tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta$.
- **La rotation** d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre $\Omega \in \mathscr{P}$ est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et tel que $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.



Proposition III.5

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application

$$r_\theta : \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}\, z. \end{array}$$

  est la rotation de centre O et d'angle θ.
- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega\,(\omega)$ un point du plan complexe. L'application

$$r_{\theta,\Omega} : \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}\,(z-\omega)+\omega. \end{array}$$

  est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Démonstration.

- Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $M(z)$ un point du plan complexe et M' le point d'affixe $r_\theta(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\, z$. Supposons $z \neq 0$ (sinon le résultat est trivial). Alors $OM' = \left|\mathrm{e}^{i\theta}\, z\right| = |z| = OM$ et $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \arg\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}\, z}{z}\right) \equiv \arg\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$. Donc r_θ est la rotation de centre O et d'angle θ.
  Réciproquement, soient $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre O. Supposons $z' \neq 0$ et $z \neq 0$ (sinon le résultat est trivial). Alors il existe $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $(\rho', \varphi') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $z' = \rho'\, \mathrm{e}^{i\,\varphi'}$ et $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}$. L'égalité $OM = OM'$ implique donc que $|z'| = \rho' = |z| = \rho$. De plus, $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ i.e. $\arg\left(\frac{\rho'\, \mathrm{e}^{i\,\varphi'}}{\rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{i(\varphi'-\varphi)}\right) = \varphi' - \varphi \equiv \theta\ [2\pi]$. Ainsi, on a bien

$$z' = \rho'\, \mathrm{e}^{i\,\varphi'} = \rho\, \mathrm{e}^{i(\varphi+\theta)} = z\, \mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega\,(\omega)$ et $M(z)$ et $M'(z')$ trois points du plan complexe.
  Premier cas, si $M = \Omega$ i.e. $z = \omega$. Alors,

$$\begin{array}{lcl} M' \text{ est l'image de } M = \Omega \text{ par la rotation} & \Leftrightarrow & \begin{cases} \Omega\, M' = \Omega\, M = 0 \\ \left(\overrightarrow{\Omega\, M}, \overrightarrow{\Omega\, M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \Omega = M' \\ & \Leftrightarrow & z' = \omega\,. \end{array}$$

  Or dans ce cas $z = \omega$ et donc $\mathrm{e}^{i\theta}\,(z-\omega)+\omega = \omega$. Ainsi, on a bien dans ce cas

$$M' \text{ est l'image de } M \text{ par la rotation} \quad \Leftrightarrow \quad z' = \mathrm{e}^{i\theta}\,(z-\omega)+\omega\,.$$

  Second cas, si $M \neq \Omega$, $z \neq \omega$ alors on aura $z' \neq \omega$. Donc il existe $(\rho, \rho', \varphi, \varphi') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times \mathbb{R}^2$ tels que $z_1 = z - \omega = \rho\, \mathrm{e}^{i\,\varphi}$ et $z_1' = z' - \omega = \rho'\, \mathrm{e}^{i\,\varphi'}$. Dans ce cas, on a

$$\begin{array}{lcl} M' \text{ est l'image de } M \text{ par la rotation} & \Leftrightarrow & \begin{cases} \Omega\, M = \Omega\, M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega\, M}, \overrightarrow{\Omega\, M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} |z-\omega| = |z-\omega'| \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \qquad \text{car } z-\omega \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} |z_1| = |z_1'| \\ \arg\left(\frac{z_1'}{z_1}\right) \equiv \arg(z_1') - \arg(z_1) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} \rho = \rho' \\ \varphi - \varphi' \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} \rho = \rho' \\ \varphi' \equiv \theta + \varphi\ [2\pi] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & z_1' = \rho'\, \mathrm{e}^{i\,\varphi'} = \rho\, \mathrm{e}^{i(\varphi+\theta)} = z_1\, \mathrm{e}^{i\theta} \\ & \Leftrightarrow & z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}\,(z-\omega)\,. \end{array}$$

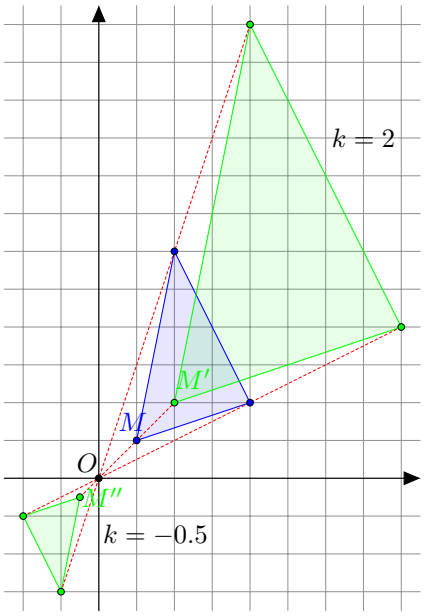
Conclusion, on a bien démontré que M' est l'image de M par la rotation d'angle θ et de centre Ω si et seulement si

$$z' = \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega\,.$$

□

Définition III.6

- **L'homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de centre O est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- **L'homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de centre $\Omega \in \mathscr{P}$ est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.



Proposition III.7

- Soit $k \in \mathbb{R}$. L'application

$$h_k : \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto kz. \end{array}$$

  est l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe. L'application

$$h_{k,\Omega} : \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto k(z-\omega)+\omega. \end{array}$$

  est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Exemple 17 : Soit $A(a)$ un point du plan complexe. Donner l'expression complexe de la symétrie centrale de centre A.
On peut généraliser ces transformations du plan avec les similitudes (hors programme) :

Définition III.8

On appelle **similitude directe** toute application du plan définie par

$$\begin{aligned} s : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto az + b, \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Proposition III.9

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq 0$ et s la similitude directe définie par $s(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u(b)}$.
- Si $a \neq 1$ alors il existe un unique point $\Omega\,(\omega)$ laissé fixe par s d'affixe

$$\omega = \frac{b}{1-a}.$$

  La similitude s s'écrit alors

$$s(z) = a\,(z - \omega) + \omega$$

  et est la composée
  - — d'une rotation $r_{\theta,\Omega}$ d'angle $\arg(a)$ et de centre Ω,
  - — d'une homothétie $h_{k,\Omega}$ de rapport $|a|$ et de centre Ω.

  Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s(z) = h_{k,\Omega} \circ r_{\theta,\Omega}(z) = r_{\theta,\Omega} \circ h_{k,\Omega}(z)$.

Démonstration. Le premier point est évident, démontrons le second et supposons $a \neq 1$. Soit $\Omega\,(\omega)$ un point du plan complexe. On observe que

$$s\,(\omega) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad a\omega + b = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{b}{1-a}.$$

Donc s admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. On note alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s(z) = az + b = a\left(z - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} + b = a\,(z - \omega) + \omega$. Puisque $a \neq 0$, il existe $(k, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $a = k\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Posons $r_{\theta,\Omega}$ la rotation d'angle θ et de centre Ω et $h_{k,\Omega}$ l'homothétie de rapport k et de centre Ω. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$h_{k,\Omega} \circ r_{\theta,\Omega}(z) = h_{k,\Omega}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\,(z - \omega) + \omega\right) = k\left[\left(\mathrm{e}^{i\theta}\,(z - \omega) + \omega\right) - \omega\right] + \omega = k\left[\mathrm{e}^{i\theta}\,(z - \omega)\right] + \omega = a\,(z - \omega) + \omega.$$

Donc $h_{k,\Omega} \circ r_{\theta,\Omega} = s$ et de même on vérifie que $s = r_{\theta,\Omega} \circ h_{k,\Omega}$.

□

Proposition III.10 (Rappel)

- La symétrie d'axe (Ox) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$$

- La symétrie d'axe (Oy) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto -\overline{z} \end{aligned}$$

IV Prochainement... Matrices - Définition

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition IV.1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, on appelle **matrice** toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$: $(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}}$ que l'on ordonne sous forme de tableau de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p-1} & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 18 :

- La place des coefficients dans le tableau a son importance. Si vous échanger la place de deux coefficients vous définissez une nouvelle matrice. Par exemple si $n = p = 2$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- De façon générale, si $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Définition IV.2

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit l'addition $+$ entre deux matrices par

$$A + B = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

  i.e.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On définit la multiplication d'une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda\, a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

  i.e.

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \dots & \lambda\, a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \dots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 19 :

- $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1 & 1+i \\ i & 2-i & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & i \\ 0 & -1 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+2i \\ i & 2-2i & 3 & 8+\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $-5 \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 0 \\ -5\sqrt{3} & 10 & -5 \\ -15 & -5 & 5/3 \end{pmatrix}$

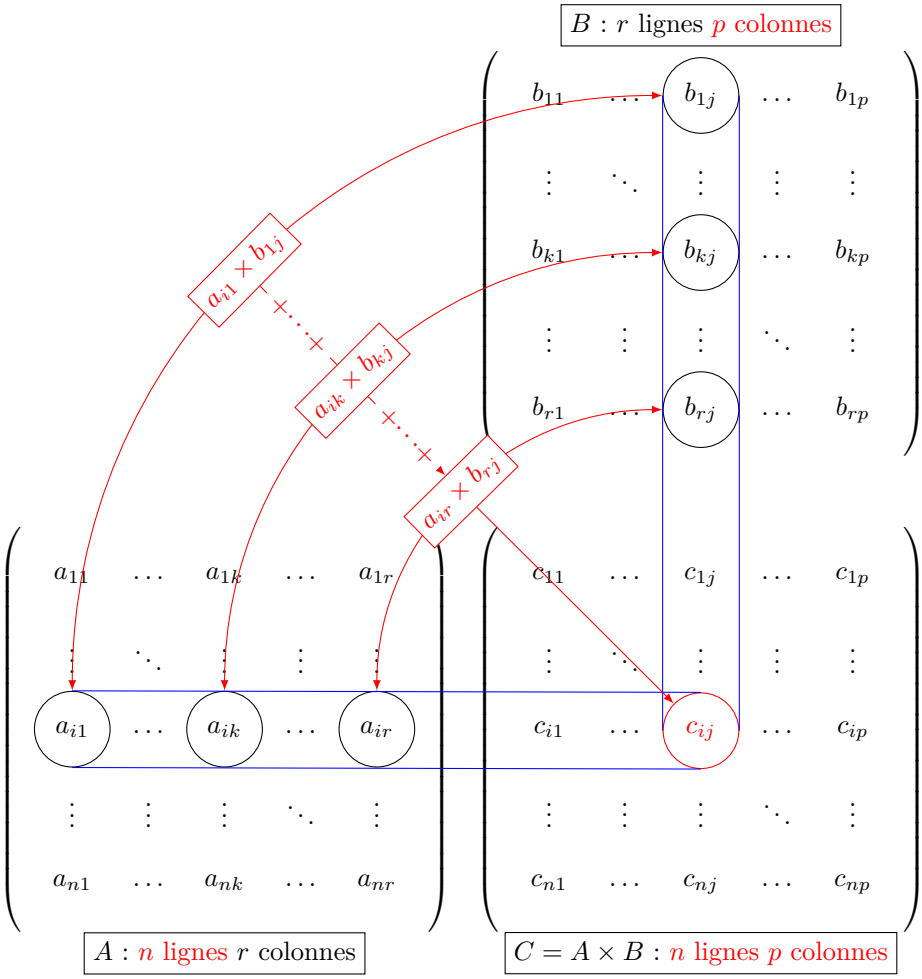
Remarque 20 :

1. Attention ! On ne peut additionner ensemble que deux matrices de même taille.
2. L'addition est commutative pour A et B deux matrices de même taille : $A + B = B + A$.

3. L'addition est associative pour A, B et C trois matrices de même taille $(A+B)+C = A+(B+C)$ et l'on peut se passer des parenthèses et écrire $A+B+C$.
4. La multiplication externe est distributive pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
5. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $kA = \underbrace{A + \cdots + A}_{k \text{ fois}}$.
6. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $A + 0_{n,p} = A$ et $\lambda 0_{n,p} = 0_{n,p}$.

Définition IV.3

Soient $(n,r,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant r}} \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. On définit **le produit matriciel** $C = AB$ par l'opération représentée ci-dessous.



Remarque 21 : On ne peut multiplier AB que si $r =$ le nombre de colonnes de $A =$ le nombre de lignes de B. On obtient alors une matrice $C = AB$ avec un nombre de lignes $= n =$ nombre de lignes de A et avec un nombre de colonnes $= p =$ nombre de colonnes de B. Notamment, avec les notations de la définition, si $n \neq p$, on ne peut pas définir BA.

Exemple 22 : Retrouver les calculs suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1+i & -1 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -i \\ 2-i & 0 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1+2i \\ 11+4i & 9i \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 3 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 3\\1 & 0 & 1\\2 & -2 & 3\end{pmatrix} =$

Evariste GALOIS *(Bourg-la-Reine 1811 - Paris 1832) est le fils d'un républicain convaincu, qui deviendra maire de Bourg-la-Reine et d'une fille de magistrat qui lui prodiguera une solide éducation classique. Il ne fréquente l'école qu'à partir de 12 ans et entre alors au collège royal à Louis-le-Grand. Il en est cependant rapidement expulsé car il refuse de chanter à la chapelle. Malgré de des prix reçus à l'école, Evariste de lasse de ses cours et doit redoubler sa classe de seconde. Mais grâce à une récente réforme, il lui est possible de suivre les cours de mathématiques de classe préparatoire. Il se passionne alors pour cette discipline , lit Eléments de géométrie de Legendre comme un roman, dévore Euler, Gauss, Lagrange, Abel... Il en néglige les autres disciplines. En été 1828, il présente le concours de Polytechnique en candidat libre mais échoue. En Octobre suivant, M. Richard (disciple de Chasles et futur professeur de Hermite), le fait entrer en spéciales à Louis-le-Grand, alors même qu'Evariste n'a pas validé de baccalauréat. Il détecte ses grandes capacités et l'encourage à publier ses travaux. Evariste envoie un premier mémoire alors à l'Académie des sciences. Cauchy cependant rejette cet article. Il échoue l'année suivante une seconde fois à Polytechnique mais est classé second à l'Ecole Normale Supérieure (alors appelée Ecole Préparatoire). Cependant il lui faut un baccalauréat qu'il obtient alors de justesse. Il envoie un second mémoire à l'Académie des sciences. Poisson le trouve incompréhensible mais incite Galois à poursuivre tandis que Fourier meurt peu de temps après l'avoir reçu et ce second manuscrit tombe également dans l'oubli. En 1830, les Trois Glorieuses éclatent mais le directeur de l'Ecole Normale enferme les étudiants pour les empêcher de participer aux combats des rues. Outré, Evariste dénonce farouchement ce procédé déloyal et y sera renvoyé en janvier 1831. Son activisme prononcé lui vaut même par la suite quelques mois d'emprisonnement pendant lesquels il rencontre Raspail ! Pour des raisons obscurs, Evariste se retrouve en 1832 à devoir se battre en duel. Se sachant condamné, il met par écrit à la hâte ses dernières découvertes mathématiques et écrit plusieurs lettres. Dans l'une d'elle, il écrit « Je me meurs victime d'une infâme coquette » laissant penser qu'une romance est l'objet de ce duel. D'autres prétendent qu'il était la conséquence d'une vengeance politique. Touché à l'abdomen, il meurt le jour suivant son duel dans les bras de son frère. Ses écrits ne seront retrouvés que des années plus tard par Liouville qui les publiera en 1846. Le monde entier reconnaîtra, trop tard, l'immense génie d'Evariste, car ses écrits, bien que formulés de façon opaque, contenait, en avance sur son temps, les bases d'une nouvelle branche des mathématiques très fécondes. Cette branche traite de ce que l'on appelle des groupes et des corps et la théorie que l'on appelle désormais théorie de Galois permet de chercher des racines d'une équation algébrique (dans un corps autre que le corps $\mathbb{C}$...)*

Vous connaissez l'histoire de cosinus qui emmène sinus en boîte. Mais connaissez vous z qui emmène x dans un bar ? x est une personne plutôt timide mais ce soir z a réussi à le persuader à sortir avec lui au bar des complexes. x est un peu réticent :
« -Ecoute z t'es sympa, mais je ne le sens pas trop ton plan.
-Mais si tu vas voir ça va te faire beaucoup de bien de sortir de ton droit chemin. C'est vraiment un endroit sympa, la seconde dimension apporte beaucoup d'espace et on rencontre dans ce bar parfois même quelques célébrités. Regarde au fond c'est j qui fait encore la bringue avec 1, tu vois tu n'es pas le seul réel.
-Et j^2, il est là ?
-Jamais quand 1 et j sont déjà présents : il annule systématiquement leur rencontre. Sinon, on a même i dans le cercle des célébrités qui vient parfois. Mais entre nous il se prend vraiment pour une star celui-là depuis que son mariage avec π au sommet de l'exponentielle a fait la une du magazine Euler Gala.
-Oh mais il y a même 0 de ce côté ! Je ne pensais pas voir autant de réels.
-Ouais mais alors méfie-toi de lui. Il se prend pour le centre du monde, sans aucun argument d'ailleurs, et il est un peu aigri depuis qu'on lui a refusé de lui donner la polaire des membres du club. »
S'approche alors des complexes pas très fréquentables, avec des noms bizarres genre ζ ou ξ.
« -Tiens mais c'est z ! Salut z ! Qu'est-ce que tu fais dans le coin ? Tu promènes ton vulgaire réel ? »
Arrive en renfort a et b. a autoritaire s'exclame :
« -Fichez le camp tous les deux ! Allez plutôt voir de l'autre côté des abscisses si j'y suis. Vous m'entendez ? Barrez-vous !
-Ouais, ouais, ça va, allez viens ζ laissons ces ringards. »
b, bon enfant, souhaitant moduler l'aigreur de ces remarques, rassure x :
« -T'en fais pas, le b.a-ba c'est de les ignorer et de prendre de la distance. Translatons-nous plutôt vers la piste de danse, tu n'imagines pas à quel point l'on s'y amuse !
-Vous êtes gentils les gars, mais je crois que mon plus gros problème c'est bien ça. Je manque vraiment d'imagination, je suis trop polarisé sur ma réalité. »
z alors s'exclame :
« -Mais... ? ? On dirait bien que tu complexes ? ! C'est super ! Viens danser ! »