Fiche de révisions : probabilités

I Le cours

1. Définir un univers, un évènement, une probabilité.
2. Définir deux évènements disjoints et deux évènements incompatibles. Lien entre les deux ?
3. Définir une variable aléatoire réelle.
4. Donner la probabilité du complémentaire.
5. Enoncer la croissance d'une probabilité.
6. Donner la formule de Poincaré pour les probabilités. Cas d'évènements incompatibles ?
7. Définir un système complet d'évènements et une distribution de probabilité.
8. Donner la loi image d'une variable aléatoire par une fonction.
9. Définir les trois lois usuelles et préciser une expérience correspondante.
10. Donner le lien entre une variable aléatoire de loi binomiale et des variables aléatoires de loi de Bernoulli.
11. Définir la probabilité d'avoir A sachant B.
12. Enoncer la formule des probabilités composées.
13. Enoncer la formule des probabilités totales.
14. Enoncer la formule de Bayes.
15. Définir et caractériser l'indépendance de deux événements.
16. Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'évènements.

II Les savoir-faire

1. Modéliser un problème concret en définissant des évènements et des variables aléatoires permettant de décrire mathématiquement la situation.
2. Traduire la question en français par une probabilité mathématique à obtenir.
3. Connaitre et reconnaitre en situation concrète les trois lois usuelles. Lorsque l'on demande la loi d'une variable aléatoire deux situations :
   - on reconnait une loi usuelle. On le justifie et on détermine le ou les paramètre(s).
   - on ne reconnait pas une loi usuelle. On calcule alors l'univers image $X(\Omega)$ et pour tout $k \in X(\Omega)$ on calcule $\mathbb{P}(X = k)$.
4. Savoir utiliser les trois formules, en les citant et en donnant son hypothèse dans le cas de la formule des probabilités totales.
5. Savoir représenter la situation par un arbre.

III Les erreurs à éviter

1. Ne jamais parachuter une réponse ni un calcul. Il faut TOUJOURS poser des variables aléatoires ou évènements avant d'attaquer un exercice.
2. Un arbre est toujours une bonne idée mais n'est jamais une réponse.
3. Ne pas oublier l'hypothèse de la formule des probabilités totales ni de citer le nom de chaque formule.
4. Bien distinguer une probabilité nette et une probabilité conditionnelle. Il faut savoir si l'on est « sachant quelque chose » ou non.
5. Ne pas oublier de donner d'abord l'univers image.
6. Toujours vérifier que le résultat d'une probabilité est bien entre 0 et 1. Dans le cas d'une variable aléatoire X penser également à vérifier lorsque c'est possible que la somme des probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ fait bien 1.
7. Ne pas confondre l'indépendance deux à deux et l'indépendance tout court (ou mutuelle).
8. Croire que les probabilités c'est pas cool.

IV Les réponses du cours

1. Un univers Ω désigne un ensemble, un évènement A est un sous-ensemble de l'univers : $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et une probabilité est une application $\mathbb{P}$ vérifiant les trois conditions suivantes :
   - $\mathbb{P}$ est définie sur un univers Ω et à valeurs dans $[0;1]$,
   - pour tout couple d'évènements $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, disjoints $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
   - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Soient $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. On dit que les évènements sont
   - disjoints si $A \cap B = \emptyset$,
   - incompatibles si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

   Si deux évènements sont disjoints alors ils sont incompatibles.
3. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire X toute fonction sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$: $X \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$.
4. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. On a
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
5. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements. Si A implique B i.e. $A \subseteq B$, alors on a
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$
6. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements. On a
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
   En particulier, si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
7. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements. On dit que $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ forme une système complet d'évènements si et seulement si
   - $\bigcup\limits_{i \in [\![1;p]\!]} A_i = \Omega$,
   - $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$.

   Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathbb{R}^p$. On dit que $(p_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une distribution de probabilité si et seulement si
   - $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $p_i \in [0;1]$,
   - $\sum\limits_{i=1}^{p} p_i = 1$.
8. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors la loi de $Z = \varphi(X)$ est donné par
$$\forall z \in Z(\Omega) = \varphi(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = z}} \mathbb{P}(X = x).$$
9. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. On note $X \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!])$. Cela correspond au tirage équiprobable d'un numéro parmi n.
   - Soit $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$. On note $X \sim \mathscr{B}(p)$. Cela correspond à un lancer d'une pièce.
   - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Cela correspond au nombre de piles obtenus en lançant n fois et de façon indépendante une même pièce.
10. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω. Posons $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

    Supposons

- les X_k suivent une même loi de Bernoulli :

$$\exists p \in [0;1]\,,\ \forall k \in [\![1;n]\!],\quad X_k \sim \mathscr{B}\left(p\right),$$

- les X_k sont indépendantes.

Alors, $X \sim \mathscr{B}\left(n,p\right)$.

11. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}\left(B\right) \neq 0$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}.$$

12. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $\left(A_i\right)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)^p$ une famille d'évènements.

$$\mathbb{P}\left(A_p \cap \cdots \cap A_1\right) = \mathbb{P}\left(A_p \mid A_{p-1} \cap \cdots \cap A_1\right)\mathbb{P}\left(A_{p-1} \mid A_{p-2} \cap \cdots \cap A_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right)\mathbb{P}\left(A_1\right).$$

13. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\left(B_k\right)_{k\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)^p$ un système complet d'évènements. Alors pour tout $A \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)$, on a

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A \cap B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A \mid B_k\right)\mathbb{P}\left(B_k\right).$$

14. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}\left(B\right) \neq 0$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A\right)\mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}.$$

15. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A,B) \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)^2$. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)$$

ou encore lorsque $\mathbb{P}\left(B\right) \neq 0$, si et seulement si

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \mathbb{P}\left(A\right).$$

16. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $\left(A_i\right)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)^p$.
    (a) On dit que les $\left(A_i\right)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)^p$ sont indépendants deux à deux si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j, \qquad \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right).$$

    (b) On dit que les $\left(A_i\right)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}\left(\Omega\right)^p$ sont indépendants si et seulement si

$$\forall J \subseteq [\![1;p]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}\left(A_i\right).$$