Fiche de révisions : représentation matricielle

I Le cours

1. Définir la matrice d'une famille de vecteurs.
2. Définir la matrice d'une application linéaire.
3. Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$?
4. Enoncer la proposition donnant le vecteur image.
5. Donner la matrice d'une composition. Cas de la puissance k ?
6. Caractériser par les matrices les isomorphismes et préciser la matrice de l'inverse.
7. Enoncer la caractérisation des bases par la représentation matricielle.
8. Donner les propriétés d'une matrice de passage (inverse et composée).
9. Enoncer la proposition donnant la représentation d'un vecteur dans une nouvelle base.
10. Enoncer les formules de changement de base. Cas des endomorphismes ?
11. Définir deux matrices semblables.
12. Caractériser le noyau, l'image et le rang d'une matrice.
13. Enoncer le théorème du rang.
14. Donner la proposition sur le rang de la transposée.
15. Caractériser l'inversibilité d'une matrice.

II Les savoir-faire

1. Savoir donner la matrice d'une application dans une base canonique.
2. Savoir donner l'application canoniquement associée à une matrice.
3. Calculer l'image d'un vecteur par la formule $Y = AX$.
4. Savoir donner une matrice de passage, dans le cas direct $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$ et dans le cas inverse où le calcul de $P^{-1} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est nécessaire.
5. Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base par la formule $X = PX'$.
6. Savoir donner la matrice de f dans une nouvelle base :
   - par la formule de changement de base : $D = P^{-1}AQ$,
   - en calculant les images $f(e_i)$ de la base $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et en exprimant ces images en fonction des e_i. Lorsque l'on a réussi a exprimer chaque $f(e_i)$ en fonction des e_j, on en déduit alors directement D.
7. Savoir utiliser une diagonalisation (i.e. une formule $A = PDP^{-1}$) pour calculer une puissance A^n, ou un inverse A^{-1} par exemple.
8. Savoir calculer le rang d'une matrice, son noyau, son image : par les définitions et/ou en s'appuyant astucieusement sur des relations entre les lignes et les colonnes pour trouver des vecteurs évidents et/ou encadrer le rang.
9. Déduire d'une représentation matricielle : si $\mathscr{B}$ est une base, si f est bijectif, le noyau, l'image et le rang d'une application linéaire.

III Les erreurs à éviter

1. Si la base d'arrivée $\mathscr{B}_F$ n'est pas la base canonique, ce n'est pas direct, il faut bien trouver les coordonnées des images dans la base $\mathscr{B}_F$ en question.
2. Faire attention aux espaces et aux bases auxquelles se réfère une représentation matricielle. Une même matrice peut représenter plusieurs applications dans des espaces et/ou des bases différentes.
3. Ne pas confondre $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ni $\mathrm{Im}(A)$ avec $\mathrm{Im}(f)$. L'égalité n'est vraie QUE si f est de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ET canoniquement associée.

IV Les réponses du cours

1. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E un espace de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. On note pour tout $j \in [\![1;p]\!]$,
$$u_j = \sum_{j=1}^{p} u_{i,j} e_i,$$
les coordonnées du vecteurs u_j dans la base $\mathscr{B}$. Alors,
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{F}\right) = (u_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$
2. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors,
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(\mathscr{B}_E)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)).$$
3. Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors, l'application
$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{L}(E,F) &\to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f), \end{aligned}$$
forme un isomorphisme. En particulier $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np$.
4. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x))$. Alors
$$Y = AX.$$
5. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $\mathscr{B}_G$, une base de G, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors,
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$
En particulier, si $E = F$ et $\mathscr{B}_F = \mathscr{B}_E$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f^n) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)^n.$$
6. Soient $, \in \mathbb{N}^*$, E et F deux espaces vectoriels de même dimension n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$. Alors,
$$f \text{ est un isomorphisme} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ est inversible.}$$
De plus, dans ce cas,
$$A^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}\left(f^{-1}\right).$$
7. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension p et $\mathscr{B}_E$ une base de E. Alors,
$$\mathscr{B} \text{ base de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{B}) \text{ est inversible.}$$
8. Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ trois bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors
   - $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1}$
   - $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$.
9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E et $x \in E$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$. Alors
$$X = PX'.$$
10. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}'_F$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$, $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)$, $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(\mathscr{B}'_F)$ et $Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{B}'_E)$. Alors,
$$D = P^{-1}AQ \quad \text{i.e.} \quad A = PDQ^{-1}.$$
En particulier si $E = F$, $\mathscr{B}_F = \mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_F = \mathscr{B}'_E$, alors $Q = P$ et
$$D = P^{-1}AP \quad \text{i.e.} \quad A = PDP^{-1}.$$

11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si,

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \qquad A = PBP^{-1}.$$

12. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{ X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0_{n,1} \}, \\ \mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p) \\ \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_p). \end{aligned}$$

13. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,

$$p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

14. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(A^T\right).$$

15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
    1) A est inversible
    2) $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
    3) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
    4) $\mathrm{rg}(A) = n$.