

## Méthodes d'études de suites numériques

On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite étudiée.

### I On reconnaît une suite du cours

1. **La suite est arithmétique ou géométrique**

Les résultats sont directs.

2. **La suite est arithmético-géométrique,  $u_{n+1} = au_n + b$**

On cherche le point fixe  $\omega$  puis on définit  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \omega$  et on montre que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.

3. **La suite est récurrente linéaire d'ordre 2,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$**

On regarde l'équation caractéristique associée et suivant son discriminant, on obtient une expression de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  que l'on détermine à l'aide des premiers termes  $u_0$  et  $u_1$ .

### II La suite est explicite, $u_n = f(n)$

Ici  $f$  est une fonction.

1. **Définition**

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie si  $f$  est définie sur  $\mathbb{N}$ . Eventuellement  $(u_n)_{n \geq n_0}$  n'est définie qu'à partir d'un certain rang  $n_0$  si  $f$  est définie sur  $\llbracket n_0 ; +\infty \llbracket$  en particulier si elle est définie sur  $\llbracket n_0 ; +\infty \llbracket$ .

2. **Bornitude**

Si  $f$  est bornée/majorée/minorée sur  $\mathbb{N}$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée/majorée/minorée.

3. **Monotonie**

Si  $f$  est monotone (strictement) sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi monotone (strictement) et de même monotonie que  $f$ .

4. **Convergence**

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  alors, par caractérisation séquentielle de la limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

### III La suite est implicite, $u_n$ est solution d'une équation $f_n(x) = 0$

Ici  $f_1, f_2, f_3, \dots$  sont des fonctions. Eventuellement la suite est définie comme solution de  $g_n(x) = a$  ou  $a \in \mathbb{R}$ , ce qui se ramène à  $f_n(x) = 0$  en posant  $f_n = g_n - a$ .

1. **Définition**

A  $n$  fixé, on utilise le théorème de la bijection pour démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet une unique solution.

2. **Bornitude**

Si par exemple  $f_n$  est strictement croissante et si  $f_n(a) < 0$  alors  $f_n(a) < f_n(u_n)$  et donc  $a < u_n$ . Même raisonnement pour montrer que  $u_n < b$ . On peut aussi l'adapter si  $f_n$  est strictement décroissante.

3. **Monotonie**

Si par exemple  $f_n$  est strictement croissante et si  $f_n(u_{n+1}) < 0$  alors  $u_{n+1} < u_n$  et si ceci est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante. On peut raisonner de la même façon si  $f_n(u_{n+1}) > 0$  ou si  $f_n$  est strictement décroissante ou on peut aussi parler de la monotonie de  $f_{n+1}$  et regarder  $f_{n+1}(u_n)$  par rapport à  $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ .

## IV La suite est récurrente, $u_{n+1} = f(u_n)$

Ici  $f$  est une fonction.

### 1. Définition

Si on montre que  $U$  est une partie stable de  $f : f(U) \subseteq U$  et si  $u_0 \in U$  (ou  $u_{n_0}$ ), alors on démontre par récurrence (à faire!) que la suite est bien définie et à valeurs dans  $U$ .

### 2. Bornitude

On applique le même principe que ci-dessus avec un ensemble éventuellement  $V$  plus petit, et donc précis, que  $U$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in V$  est encadré par  $\inf(V)$  et  $\sup(V)$ .

### 3. Monotonie

- Si  $f$  est (strictement) croissante alors, on démontre par récurrence (à faire!) que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est (strictement) monotone et sa monotonie est donnée par la comparaison de  $u_0$  et  $u_1$  (croissante si  $u_0 \leq u_1$ , décroissante si  $u_0 \geq u_1$  en adaptant pour la stricte monotonie).
- Si  $f$  est (strictement) décroissante alors la fonction  $f \circ f$  est (strictement) croissante et on applique le raisonnement précédent aux suites des termes pairs  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et des termes impairs  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  car alors  $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$  et  $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$  et on peut espérer que ces suites sont adjacentes.
- Etudier le signe de  $f(x) - x$ .

### 4. Convergence

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  alors  $\ell$  est nécessairement un point fixe de  $f : f(\ell) = \ell$ . Par contraposée, on a donc aussi que si  $f$  n'admet pas de point fixe,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
- Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, avec  $k \in ]0; 1[$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est contractante (en prenant  $x = u_n$  et  $y = u_{n-1}$ ,

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k |u_n - u_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Si  $f$  admet un point fixe là où elle est contractante, on a aussi (en prenant  $x = u_{n-1}$  et  $y = \ell$ )

$$|u_n - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_{n-1} - \ell| \leq \dots \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Ce qui par passage à la limite permet de montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

## V Autres techniques ou techniques transverses

1. Montrer que la suite est majorée/minorée/encadrée par des suites intéressantes et utiliser **le théorème d'encadrement** (utile souvent pour des suites définies comme étant des sommes).
2. Montrer que la suite est monotone (direct, par différence, par quotient lorsqu'elle est de signe constant) et majorée/minorée et utiliser **le théorème de la limite monotone**.
3. Rechercher un équivalent pour déterminer la limite d'une suite.
4. Utiliser une sous-suite divergente ou des sous-suites ne convergeant pas vers le même limite pour montrer que la suite diverge.

