## Colle du 20/11 - Sujet 1
## Fonctions usuelles et équations complexes

**Question de cours.** Enoncer et démontrer la relation entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 1.** Montrer de deux façons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 2.**

1. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0$.
2. Démontrer que parmi les solutions de l'équation précédente, trois points décrivent une triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $8\,\mathrm{e}^{4z} + 8\,\mathrm{e}^{3z} - \mathrm{e}^z - 1 = 0$.
4. Déterminer l'ensemble des réels $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$8\sin^3(\theta) - 2\sin(\theta)\sin(3\theta) - \sin(\theta) - 3\cos(2\theta) + 2 = 0.$$

---



## Colle du 20/11 - Sujet 2
## Fonctions usuelles et équations complexes

**Question de cours.** Justifier la dérivabilité de la fonction arcsin et calculer sa dérivée.

**Exercice 1.** Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$ :

$$\log_x(10) = 2\log_{10x}(10) + 3\log_{100x}(10).$$

**Exercice 2.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$. Préciser les valeurs possibles de $a$ puis résoudre l'équation.

---



## Colle du 20/11 - Sujet 3
## Fonctions usuelles et équations complexes

**Question de cours.** Démonstration de l'écriture polaire des racines $n$-ièmes de l'unité.

**Exercice 1.** On considère l'équation suivante d'inconnu $z \in C$ :

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0. \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions imaginaires pures de (E).
2. Résoudre l'équation $(E)$ dans $\mathbb{C}$.
3. Quelle est la nature du triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

**Exercice 2.** On pose $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Etudier la parité de $f$.
2. Etudier la dérivabilité de $f$ et montrer que lorsque $f$ est dérivable, on a

$$f'(x) = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left|1-x^2\right|} - \frac{2}{1+x^2}.$$

3. En déduire une expression plus simple de $f$.